

Álgebra Geométrica e Aplicações na Física

Uma Abordagem Unificada da Geometria e da Física

Carlos R. de Moraes Filho

15 de junho de 2026

Documento de Referência em Álgebra Geométrica

Conteúdo

I	Fundamentos da Álgebra Geométrica	9
1	Motivação e Contexto Histórico	9
2	Produto Geométrico	9
2.1	Intuição Geométrica	10
2.2	Exemplos Detalhados em $\mathcal{Cl}(2, 0)$	10
2.3	O Bivetor: Plano Orientado	11
2.4	Propriedades Algébricas	12
2.5	Exemplos em $\mathcal{Cl}(3, 0)$	12
3	Álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(p, q)$	13
3.1	Definição	13
3.2	Base Canônica e Dimensão	13
3.3	Graus e Multivetores	13
3.4	Pseudoescalar	14
4	Operações Fundamentais	14
4.1	Reversão	14
4.2	Involução de Grau (Conjugação Principal)	15
4.3	Conjugação de Clifford	15
4.4	Norma	15
4.5	Projeção e Rejeição	15
4.6	Dualidade	16
5	Produto Exterior e Produto Interior Generalizados	17
5.1	Hierarquia de Graus: Diagrama	17
5.2	Produto Exterior	17
5.3	Produto Interior (Contração)	18

6	Rotações via Rotores	19
6.1	Reflexões	19
6.2	Rotores: Composição de Duas Reflexões	20
6.3	Exemplos Detalhados de Rotações	21
6.4	Composição de Rotações	23
6.5	Interpolação de Rotações (SLERP)	23
6.6	Vantagens sobre Matrizes de Rotação	24
6.7	Rotores e Quatérnions	24
7	Boosts de Lorentz como Rotores Hiperbólicos	24
7.1	A Ideia Central	24
7.2	Comparação: Rotação vs. Boost	25
7.3	Exemplo Detalhado: Boost em x com $v = 0.6c$	25
7.4	Composição de Boosts e Rotação de Wigner	26
7.5	Diagrama de Minkowski: Boost como Rotação Hiperbólica	27
7.6	Tabela Resumo: Rotações vs. Boosts	27
II	Álgebras Geométricas Específicas	28
1	$\mathcal{Cl}(2, 0)$ — Álgebra do Plano Euclidiano	28
2	$\mathcal{Cl}(3, 0)$ — Álgebra do Espaço Euclidiano 3D	28
3	$\mathcal{Cl}(0, 1)$ e $\mathcal{Cl}(0, 2)$ — Complexos e Quatérnions	29
4	Tabela de Isomorfismos	29
5	Periodicidade de Bott	29
III	Álgebra do Espaço Físico — APS $\mathcal{Cl}(3, 0)$	30
1	Formulação de Pauli na APS	30
1.1	Paravectores	30

1.2	Transformações de Lorentz na APS	31
2	Eletromagnetismo na APS	31
3	Spinors na APS	31
IV	Álgebra do Espaço-Tempo — STA $\mathcal{Cl}(1,3)$	32
1	Estrutura da STA	32
1.1	Vetores Relativos (Frame γ_0)	32
1.2	Decomposição Espaço-Temporal	33
2	Transformações de Lorentz na STA	33
2.1	Rotores de Lorentz	33
2.2	Grupo de Lorentz e Spin	34
3	Eletromagnetismo na STA	35
3.1	Tensor de Faraday como Bivetor	35
3.2	Equações de Maxwell	35
3.3	Invariantes do Campo	35
3.4	Força de Lorentz	35
3.5	Onda Eletromagnética	36
4	Equação de Dirac na STA	36
4.1	Formulação sem Matrizes	36
4.2	Decomposição Canônica do Spinor	36
4.3	Observáveis de Dirac	37
5	Gravitação na STA	37
5.1	Teoria Gauge da Gravidade (GTG)	37
V	Álgebra Geométrica Conforme — CGA $\mathcal{Cl}(4,1)$	38

1	Construção do Modelo Conforme	38
1.1	Mapeamento Conforme	38
1.2	Objetos Geométricos como Multivetores	39
2	Representação Dual (IPNS)	39
3	Transformações Conformes como Rotores	40
3.1	Translação	40
3.2	Rotação	40
3.3	Dilatação	40
3.4	Inversão	40
3.5	Reflexão em Superfície	40
4	Interseção de Objetos na CGA	41
5	Aplicações da CGA	41
VI	Álgebra Geométrica Projetiva — PGA $\mathcal{Cl}(3, 0, 1)$	42
1	Motivação e Construção	42
1.1	Vantagens sobre a CGA	42
2	Elementos Geométricos na PGA	42
2.1	Pontos	43
2.2	Planos	43
2.3	Retas	43
3	Transformações na PGA	43
3.1	Reflexão em Plano	43
3.2	Rotação (Composição de Reflexões em Planos Concorrentes)	43
3.3	Translação (Composição de Reflexões em Planos Paralelos)	44
3.4	Motor (Transformação Rígida Geral)	44

4	Métrica e Distância na PGA	44
5	PGA 2D — $\mathcal{Cl}(2, 0, 1)$	44
VII	Aplicações na Mecânica Clássica	45
1	Mecânica de Corpo Rígido	45
1.1	Velocidade Angular como Bivetor	45
1.2	Equações de Euler	45
1.3	Giroscópio e Precessão	45
2	Mecânica Orbital	46
3	Mecânica Lagrangiana Geométrica	46
VIII	Aplicações na Mecânica Quântica	47
1	Equação de Schrödinger em GA	47
1.1	Eliminação da Unidade Imaginária	47
1.2	Interpretação Geométrica do Spin	47
2	Equação de Dirac (Revisitada)	48
2.1	Forma Hestenes	48
2.2	Corrente de Probabilidade	48
2.3	Zitterbewegung	48
3	Teoria de Dirac-Hestenes e o Elétron	48
3.1	Frame Móvel do Elétron	48
3.2	Equação de Bargmann-Michel-Telegdi	49
4	Oscilador Harmônico e Estados Coerentes	49
IX	Cálculo Geométrico e Formas Diferenciais	50

1	Derivada Vetorial	50
1.1	Operador Nabla como Vetor	50
1.2	Exemplos Fundamentais	50
2	Teorema Fundamental do Cálculo Geométrico	51
3	Formas Diferenciais na GA	51
3.1	Correspondência	51
3.2	Laplaciano Geométrico	52
4	Cálculo em Variedades Curvas	52
X	Aplicações no Eletromagnetismo	53
1	Formulação Completa de Maxwell na STA	53
1.1	Equação de Maxwell Unificada	53
1.2	Potencial Eletromagnético	53
1.3	Energia e Momento	53
2	Óptica Geométrica e Polarização	54
2.1	Elipse de Polarização	54
2.2	Parâmetros de Stokes via GA	54
3	Teoria de Antenas e Radiação	54
XI	Aplicações na Relatividade e Gravitação	55
1	Relatividade Especial na STA	55
1.1	Cinemática Relativística	55
1.2	Adição Relativística de Velocidades	55
1.3	Precessão de Thomas	56
2	Gravitação Gauge (GTG) — Detalhes	56

2.1	Campos Gauge	56
2.2	Tensores de Curvatura e Torção	56
2.3	Solução de Schwarzschild na STA	56
2.4	Equação de Dirac em Espaço-Tempo Curvo	57
3	Ondas Gravitacionais na STA	57
XII	Aplicações em Teoria de Campos e Partículas	57
1	Teoria de Gauge na GA	57
1.1	Campos de Gauge como Bivetores	57
1.2	QED na STA	58
2	Spinors e Grupos de Lie	58
2.1	Álgebras de Lie como Bivetores	58
2.2	Classificação de Spinors	58
3	Supersimetria na GA	59
4	Twistors e GA	59
XIII	Implementação Computacional	60
1	Representação e Armazenamento	60
1.1	Tabela de Multiplicação	60
1.2	Complexidade Computacional	60
2	Bibliotecas e Ferramentas	61
3	Otimizações	61
3.1	Exploração de Esparsidade	61
3.2	Representação Matricial	61

XIV	Tópicos Avançados e Conexões	62
1	Cálculo de Clifford e Análise Hipercomplexa	62
1.1	Funções Monogênicas	62
1.2	Transformada de Fourier de Clifford	62
2	GA e Informação Quântica	63
2.1	Qubits como Rotores	63
2.2	Portas Quânticas como Rotores	63
2.3	Emaranhamento	63
3	GA em Cristalografia e Simetrias Discretas	63
3.1	Grupos Pontuais via Rotores	63
3.2	Quasicristais	64
4	Relação com Formas de Cartan	64
4.1	Álgebra Exterior $\leftrightarrow$ GA	64
5	GA e Machine Learning Geométrico	64
5.1	Redes Neurais Equivariantes	64
5.2	Clifford Group Equivariant Neural Networks	65

Parte I

Fundamentos da Álgebra Geométrica

1 Motivação e Contexto Histórico

A **Álgebra Geométrica** (GA) é uma estrutura matemática que unifica e generaliza números reais, complexos, quatérnions, álgebra vetorial e formas diferenciais em um único framework algébrico coerente. Desenvolvida originalmente por Hermann Grassmann (1844) e William Kingdon Clifford (1878), foi redescoberta e promovida na física moderna por David Hestenes a partir de 1966.

A GA resolve deficiências fundamentais da álgebra vetorial de Gibbs:

- O produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ só existe em 3D e produz um pseudovetor, não um vetor verdadeiro.
- Não há noção natural de "dividir" por um vetor.
- Rotações requerem matrizes, sem representação algébrica intrínseca.
- Objetos geométricos de diferentes dimensões (pontos, linhas, planos) não coexistem numa mesma álgebra.

2 Produto Geométrico

O objeto central da GA é o **produto geométrico** entre vetores, definido axiomáticamente:

$$\boxed{ab = a \cdot b + a \wedge b} \tag{1}$$

onde $a \cdot b$ é o **produto interno** (escalar, simétrico) e $a \wedge b$ é o **produto exterior** (bivetor, antissimétrico):

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba), \quad a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) \quad (2)$$

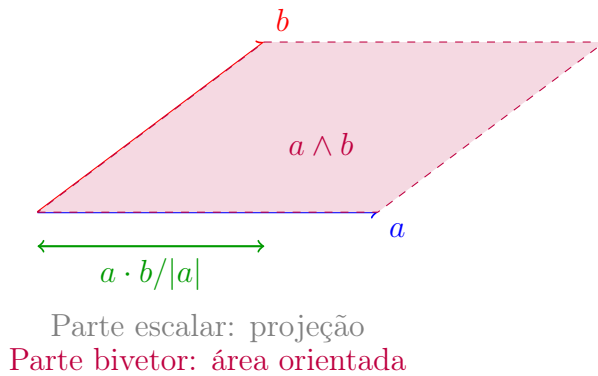
O axioma fundamental é que o quadrado de qualquer vetor é um escalar:

$$\boxed{a^2 = a \cdot a = |a|^2 \in \mathbb{R}} \quad (3)$$

2.1 Intuição Geométrica

O produto geométrico ab codifica simultaneamente **duas informações geométricas**:

- $a \cdot b = |a||b| \cos \theta$: Quanto a e b são **paralelos** (projeção).
- $a \wedge b = |a||b| \sin \theta \hat{B}$: Quanto a e b são **perpendiculares** (área orientada do paralelogramo).



2.2 Exemplos Detalhados em $\mathcal{Cl}(2, 0)$

Considere $\{e_1, e_2\}$ com $e_1^2 = e_2^2 = 1$ e $e_1 e_2 = -e_2 e_1$.

Exemplo 1: Produto de vetores da base.

$$e_1 e_1 = e_1^2 = 1, \quad e_2 e_2 = e_2^2 = 1 \quad (4)$$

$$e_1 e_2 = e_{12} \quad (\text{bivetor — não é escalar!}), \quad e_2 e_1 = -e_{12} \quad (5)$$

Exemplo 2: Sejam $a = 3e_1 + e_2$ e $b = e_1 + 2e_2$. Calculemos ab :

$$ab = (3e_1 + e_2)(e_1 + 2e_2) \quad (6)$$

$$= 3e_1e_1 + 6e_1e_2 + e_2e_1 + 2e_2e_2 \quad (7)$$

$$= 3(1) + 6e_{12} + (-e_{12}) + 2(1) \quad (8)$$

$$= 5 + 5e_{12} \quad (9)$$

Verificação:

- $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) = 5$ (escalar). De fato: $3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$ ✓
- $a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) = 5e_{12}$ (bivetor). De fato: $3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$ ✓

Exemplo 3: Inverso de um vetor. Se $a = 3e_1 + e_2$, então $a^2 = 9 + 1 = 10$:

$$a^{-1} = \frac{a}{a^2} = \frac{3e_1 + e_2}{10} = 0.3e_1 + 0.1e_2 \quad (10)$$

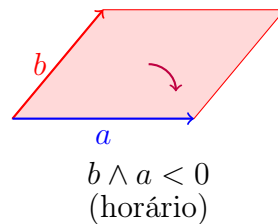
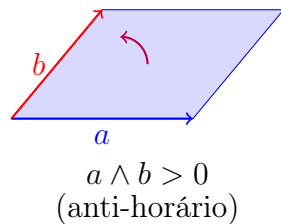
Verificação: $aa^{-1} = (3e_1 + e_2)(0.3e_1 + 0.1e_2) = 0.9 + 0.3e_{12} - 0.3e_{12} + 0.1 = 1$ ✓

Exemplo 4: Vetores paralelos vs. ortogonais.

- $a = 2e_1$, $b = 5e_1$ (paralelos): $ab = 10$, $ba = 10 \rightarrow ab = ba$ (comutam, produto é escalar).
- $a = e_1$, $b = e_2$ (ortogonais): $ab = e_{12}$, $ba = -e_{12} \rightarrow ab = -ba$ (anticomutam, produto é bivetor puro).

2.3 O Bivetor: Plano Orientado

O bivetor $a \wedge b$ representa o **plano orientado** gerado por a e b , com magnitude igual à área do paralelogramo:



Nota crucial: $a \wedge b = -(b \wedge a)$. A orientação importa! Trocar a ordem inverte o sentido de rotação no plano.

2.4 Propriedades Algébricas

- **Associatividade:** $(ab)c = a(bc)$
- **Distributividade:** $a(b + c) = ab + ac$
- **Não-comutatividade:** $ab \neq ba$ em geral
- **Inversibilidade:** Para $a^2 \neq 0$, $a^{-1} = a/a^2$

Vetores ortogonais anticomutam:

$$a \cdot b = 0 \implies ab = -ba \quad (11)$$

Vetores paralelos comutam:

$$a \wedge b = 0 \implies ab = ba = a \cdot b \quad (12)$$

2.5 Exemplos em $\mathcal{Cl}(3, 0)$

Em 3D com base $\{e_1, e_2, e_3\}$:

Exemplo 5: Sejam $a = e_1 + 2e_2 + e_3$ e $b = e_1 - e_2 + 3e_3$:

$$a \cdot b = (1)(1) + (2)(-1) + (1)(3) = 1 - 2 + 3 = 2 \quad (13)$$

$$a \wedge b = (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1)e_{12} + (1 \cdot 3 - 1 \cdot 1)e_{13} + (2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1))e_{23} \quad (14)$$

$$= -3e_{12} + 2e_{13} + 7e_{23} \quad (15)$$

$$ab = 2 - 3e_{12} + 2e_{13} + 7e_{23} \quad (16)$$

Comparação com produto vetorial: $a \times b = -I(a \wedge b) = 7e_1 - 2e_2 - 3e_3$.

Exemplo 6: Produto geométrico de três vetores $e_1e_2e_3$:

$$e_1e_2e_3 = (e_1e_2)e_3 = e_{12}e_3 = e_{123} = I \quad (\text{pseudoescalar, volume unitário}) \quad (17)$$

Propriedades de I em 3D: $I^2 = e_1e_2e_3e_1e_2e_3 = -1$, e I comuta com todos os elementos.

3 Álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(p, q)$

3.1 Definição

Dado um espaço vetorial V de dimensão $n = p + q$ com forma quadrática de assinatura (p, q) , a **álgebra de Clifford** $\mathcal{Cl}(p, q)$ é gerada por uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ satisfazendo:

$$\boxed{e_i e_j + e_j e_i = 2\eta_{ij}} \quad (18)$$

$$\text{onde } \eta_{ij} = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q).$$

3.2 Base Canônica e Dimensão

A álgebra possui 2^n elementos de base:

$$\{1, \underbrace{e_i}_n, \underbrace{e_i e_j}_{(i < j)}, \underbrace{e_i e_j e_k}_{(i < j < k)}, \dots, e_1 e_2 \dots e_n\} \quad (19)$$

A dimensão total é:

$$\dim \mathcal{Cl}(p, q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (20)$$

3.3 Graus e Multivetores

Um elemento geral da álgebra é um **multivetor**:

$$M = \underbrace{\alpha}_{\text{grau } 0} + \underbrace{a}_{\text{grau } 1} + \underbrace{B}_{\text{grau } 2} + \underbrace{T}_{\text{grau } 3} + \dots + \underbrace{\omega I}_{\text{grau } n} \quad (21)$$

- **Grau 0 (escalar):** Números reais.
- **Grau 1 (vetor):** Elementos de V , representam direções.
- **Grau 2 (bivetor):** Planos orientados, representam rotações.
- **Grau 3 (trivetor):** Volumes orientados.

- **Grau n (pseudoescalar):** $I = e_1 e_2 \cdots e_n$, o elemento de volume.

O operador de projeção de grau k é denotado $\langle M \rangle_k$.

3.4 Pseudoescalar

O **pseudoescalar** $I = e_1 e_2 \cdots e_n$ tem propriedades cruciais:

$$I^2 = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot (-1)^q \quad (22)$$

Álgebra	n	I	I^2
$\mathcal{Cl}(2, 0)$	2	$e_1 e_2$	-1
$\mathcal{Cl}(3, 0)$	3	$e_1 e_2 e_3$	-1
$\mathcal{Cl}(1, 3)$	4	$e_0 e_1 e_2 e_3$	-1
$\mathcal{Cl}(3, 1)$	4	$e_1 e_2 e_3 e_0$	+1
$\mathcal{Cl}(4, 1)$	5	$e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$	+1

Tabela 1: Pseudoescalar para álgebras comuns na física.

4 Operações Fundamentais

4.1 Reversão

A **reversão** $\tilde{M}$ inverte a ordem dos vetores em cada produto:

$$(\widetilde{ab \cdots c}) = c \cdots ba \quad (23)$$

Para um elemento de grau k : $\tilde{M}_k = (-1)^{k(k-1)/2} M_k$.

Sinais por grau:

Grau k	0	1	2	3	4	5
$(-1)^{k(k-1)/2}$	+	+	-	-	+	+

Exemplo: Em $\mathcal{Cl}(3, 0)$, seja $M = 2 + 3e_1 + 5e_{12} - e_{123}$:

$$\tilde{M} = 2 + 3e_1 - 5e_{12} + e_{123} \quad (24)$$

(escalares e vetores mantêm sinal; bivectores e trivetores invertem.)

Utilidade: A reversão é essencial para rotações ($v' = Rv\tilde{R}$) e para calcular normas.

4.2 Involução de Grau (Conjugação Principal)

$$\hat{M}_k = (-1)^k M_k \quad (25)$$

Inverte o sinal dos graus ímpares (vetores, trivetores, etc.):

Exemplo: $\hat{M} = 2 - 3e_1 + 5e_{12} + e_{123}$ (vetores e trivetores invertidos, escalares e bivectores preservados).

4.3 Conjugação de Clifford

$$\bar{M}_k = (-1)^{k(k+1)/2} M_k \quad (26)$$

Sinais: Grau 0: +, Grau 1: −, Grau 2: −, Grau 3: +, Grau 4: +, ...

4.4 Norma

$$|M|^2 = \langle M\tilde{M} \rangle_0 \quad (27)$$

Exemplo: Para um rotor $R = \cos \theta/2 - e_{12} \sin \theta/2$:

$$R\tilde{R} = (\cos \theta/2 - e_{12} \sin \theta/2)(\cos \theta/2 + e_{12} \sin \theta/2) \quad (28)$$

$$= \cos^2 \theta/2 + \sin^2 \theta/2 = 1 \quad (\text{rotor unitário}) \quad (29)$$

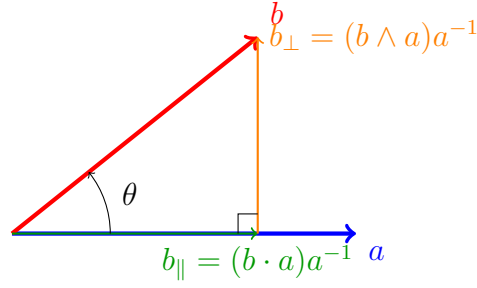
4.5 Projeção e Rejeição

A **projeção** de b sobre a (componente de b paralela a a):

$$b_{\parallel} = (b \cdot a)a^{-1} = \frac{b \cdot a}{a^2} a \quad (30)$$

A **rejeição** de b por a (componente de b perpendicular a a):

$$b_{\perp} = (b \wedge a)a^{-1} = b - b_{\parallel} \quad (31)$$



Exemplo numérico: Projetar $b = 3e_1 + 4e_2$ sobre $a = 2e_1$:

$$b_{\parallel} = \frac{b \cdot a}{a^2} a = \frac{6}{4}(2e_1) = 3e_1 \quad (32)$$

$$b_{\perp} = b - b_{\parallel} = (3e_1 + 4e_2) - 3e_1 = 4e_2 \quad (33)$$

Note: $(b \wedge a)a^{-1} = (3 \cdot 0 - 4 \cdot 2)e_{12} \cdot \frac{2e_1}{4} = -8e_{12} \cdot \frac{e_1}{2} = -4e_{12}e_1 = 4e_2 \checkmark$.

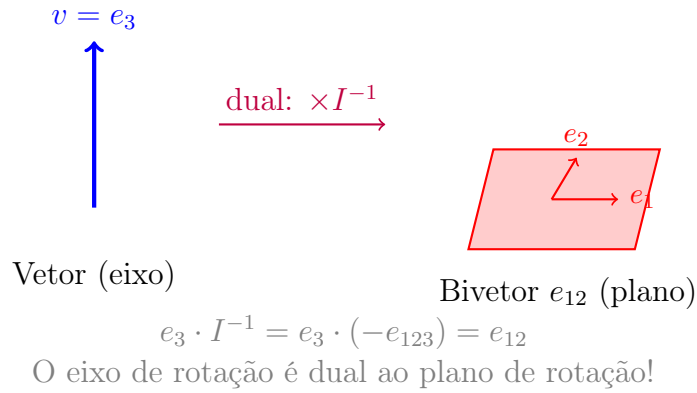
4.6 Dualidade

O **dual** de um multivetor é obtido multiplicando pelo pseudoescalar inverso:

$$M^* = MI^{-1} \quad (34)$$

Em $\mathcal{Cl}(3,0)$, o dual transforma graus: $k \rightarrow (n - k)$:

- Escalar (grau 0) $\leftrightarrow$ Pseudoescalar (grau 3)
- Vetor (grau 1) $\leftrightarrow$ Bivector (grau 2)



O produto vetorial clássico é na verdade o dual do produto exterior:

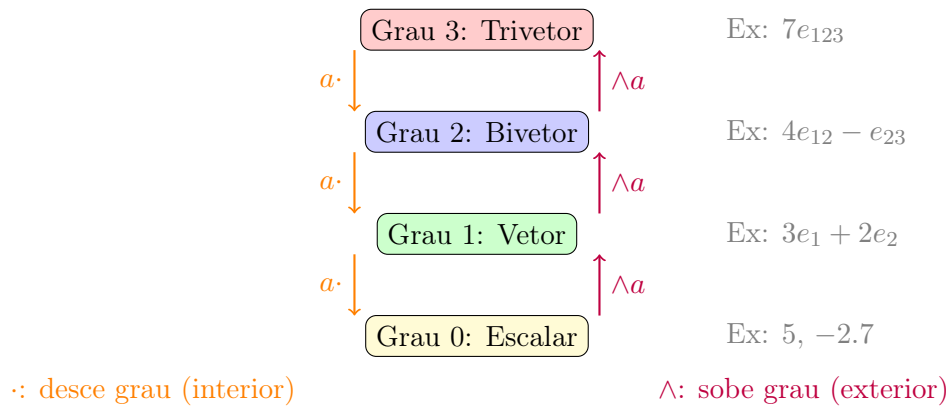
$$\boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -I(a \wedge b)} \quad (35)$$

Exemplo: $e_1 \times e_2 = -I(e_1 \wedge e_2) = -e_{123} e_{12} = -e_{123} e_{12} = e_3$.

Isto explica porque $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é um *pseudovetor* — ele é na verdade um bivetor (plano) disfarçado de vetor pela dualidade 3D!

5 Produto Exterior e Produto Interior Generalizados

5.1 Hierarquia de Graus: Diagrama



5.2 Produto Exterior

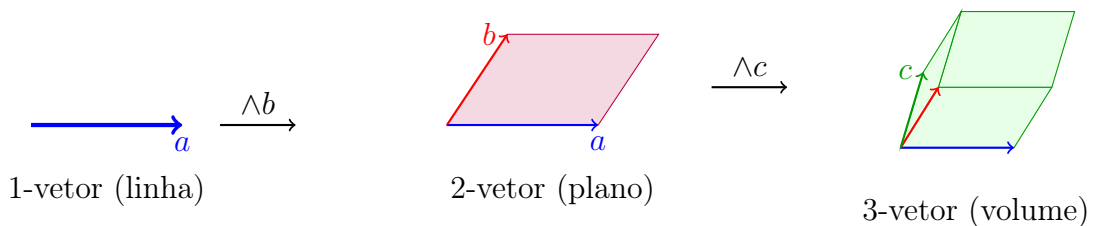
Para um r -vetor A_r e um s -vetor B_s :

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \quad (36)$$

Propriedades:

- Antissimetria: $A_r \wedge B_s = (-1)^{rs} B_s \wedge A_r$
- Associatividade: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
- $a \wedge a = 0$ para qualquer vetor a (não se pode "estender" na mesma direção)

Interpretação geométrica progressiva:



Exemplo: Em $\mathcal{C}\ell(3, 0)$, sejam $a = e_1 + e_2$ e $b = e_2 + e_3$:

$$a \wedge b = (e_1 + e_2) \wedge (e_2 + e_3) = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + \cancel{e_2 \wedge e_2} + e_2 \wedge e_3 \quad (37)$$

$$= e_{12} + e_{13} + e_{23} \quad (38)$$

Agora adicionemos $c = e_1 + e_3$:

$$a \wedge b \wedge c = (e_{12} + e_{13} + e_{23}) \wedge (e_1 + e_3) \quad (39)$$

$$= e_{12} \wedge e_3 + e_{13} \wedge e_1 + e_{23} \wedge e_1 \quad (40)$$

$$= e_{123} - e_{131} + e_{231} = e_{123} + e_{113} - e_{123} \quad (41)$$

$$= 2e_{123} \quad (42)$$

(O volume do paralelepípedo gerado por a, b, c é 2.)

5.3 Produto Interior (Contração)

$$A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} \quad (43)$$

O produto interior "remove" dimensões. Para um vetor a e um k -vetor B_k :

$$\boxed{a B_k = a \cdot B_k + a \wedge B_k} \quad (44)$$

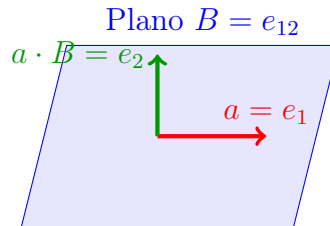
onde $a \cdot B_k$ é um $(k-1)$ -vetor e $a \wedge B_k$ é um $(k+1)$ -vetor.

Exemplo fundamental: Contração de vetor com bivetor.

Seja $a = e_1$ e $B = e_{12}$ (o plano xy). Então:

$$a \cdot B = e_1 \cdot e_{12} = \langle e_1 e_{12} \rangle_1 = \langle e_1 e_1 e_2 \rangle_1 = \langle e_2 \rangle_1 = e_2 \quad (45)$$

Interpretação: "contrair e_1 com o plano e_{12} " retorna e_2 — a direção perpendicular a e_1 **dentro do plano**.



$a \cdot B = \text{componente } \perp a \text{ dentro do plano } B$

Exemplo 2: Vetor fora do plano. Seja $a = e_3$ e $B = e_{12}$:

$$e_3 \cdot e_{12} = \langle e_3 e_{12} \rangle_1 = \langle e_{312} \rangle_1 = 0 \quad (\text{grau 3, não grau 1!}) \quad (46)$$

Se o vetor é perpendicular ao plano, a contração é zero — não há componente "dentro" do plano.

Fórmula útil: Para vetor a e bivetor $B = b \wedge c$:

$$a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b)c - (a \cdot c)b \quad (47)$$

(Análogo da regra BAC-CAB do produto vetorial triplo.)

6 Rotações via Rotores

6.1 Reflexões

A reflexão de um vetor v no hiperplano perpendicular a $\hat{n}$ ($|\hat{n}| = 1$):

$$\boxed{v' = -\hat{n}v\hat{n}} \quad (48)$$

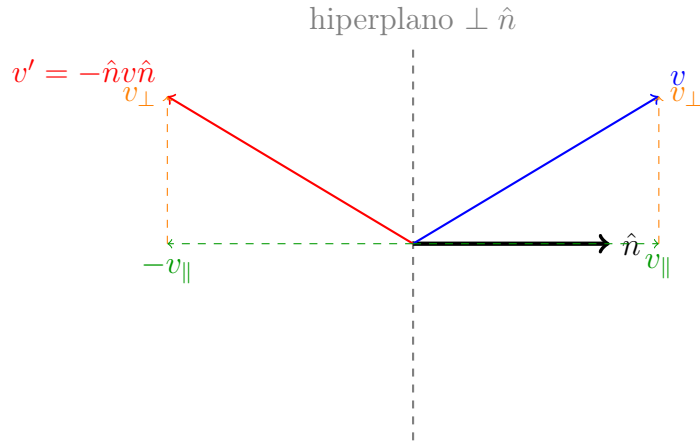
Derivação: Decompomos $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ onde $v_{\parallel}$ é paralelo a $\hat{n}$ e $v_{\perp}$ é perpendicular:

$$-\hat{n}v\hat{n} = -\hat{n}(v_{\parallel} + v_{\perp})\hat{n} = -\hat{n}v_{\parallel}\hat{n} - \hat{n}v_{\perp}\hat{n} \quad (49)$$

Como $v_{\parallel}$ é paralelo a $\hat{n}$: $\hat{n}v_{\parallel} = v_{\parallel}\hat{n}$, logo $-\hat{n}v_{\parallel}\hat{n} = -v_{\parallel}\hat{n}^2 = -v_{\parallel}$.

Como $v_{\perp}$ é perpendicular a $\hat{n}$: $\hat{n}v_{\perp} = -v_{\perp}\hat{n}$, logo $-\hat{n}v_{\perp}\hat{n} = v_{\perp}\hat{n}^2 = +v_{\perp}$.

Resultado: $v' = -v_{\parallel} + v_{\perp}$ — a componente paralela inverte, a perpendicular preserva. ✓



Exemplo: Reflexão de $v = 3e_1 + 4e_2$ no eixo e_2 (espelho perpendicular a $\hat{n} = e_1$):

$$v' = -e_1(3e_1 + 4e_2)e_1 = -(3e_1e_1e_1 + 4e_1e_2e_1) \quad (50)$$

$$= -(3e_1 + 4(-e_2e_1)e_1) = -(3e_1 - 4e_2) = -3e_1 + 4e_2 \quad (51)$$

A componente em e_1 inverteu, a em e_2 manteve-se.

6.2 Rotores: Composição de Duas Reflexões

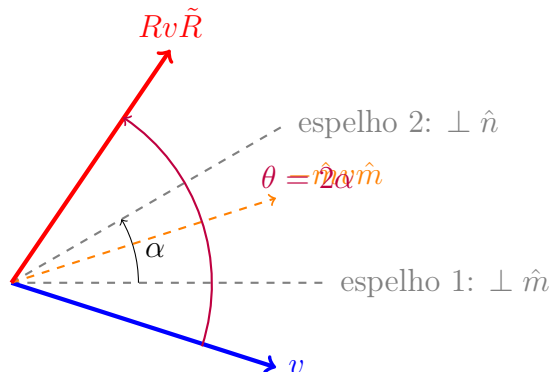
Uma rotação é a composição de duas reflexões. Se refletimos em $\hat{m}$ e depois em $\hat{n}$:

$$v'' = -\hat{n}(-\hat{m}v\hat{m})\hat{n} = (\hat{n}\hat{m})v(\hat{m}\hat{n}) = Rv\tilde{R} \quad (52)$$

onde definimos o **rotor**:

$$R = \hat{n}\hat{m} = \hat{n} \cdot \hat{m} + \hat{n} \wedge \hat{m} = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{B} \quad (53)$$

O ângulo de rotação é $\theta = 2\alpha$ onde α é o ângulo entre $\hat{m}$ e $\hat{n}$, e o plano de rotação é $\hat{B} = \hat{n} \wedge \hat{m} / |\hat{n} \wedge \hat{m}|$.



Em forma exponencial, o rotor é:

$$\boxed{R = e^{-\hat{B}\theta/2} = \cos \frac{\theta}{2} - \hat{B} \sin \frac{\theta}{2}} \quad (54)$$

onde $\hat{B}$ é o **bivector unitário** do plano de rotação ($\hat{B}^2 = -1$).

A rotação de qualquer multivetor M :

$$\boxed{M' = RM\tilde{R}, \quad R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1} \quad (55)$$

6.3 Exemplos Detalhados de Rotações

Exemplo 1: Rotação de 90° no plano e_1e_2

Plano de rotação: $\hat{B} = e_1e_2 = e_{12}$. Ângulo: $\theta = 90 = \pi/2$.

$$R = e^{-e_{12}\pi/4} = \cos(45) - e_{12} \sin(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e_{12}) \quad (56)$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e_{12}) \quad (57)$$

Aplicando sobre $v = e_1$:

$$v' = R e_1 \tilde{R} = \frac{1}{2}(1 - e_{12}) e_1 (1 + e_{12}) \quad (58)$$

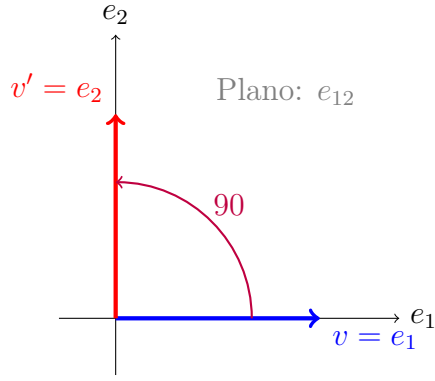
$$= \frac{1}{2}(e_1 - e_{12}e_1)(1 + e_{12}) \quad (59)$$

$$= \frac{1}{2}(e_1 + e_2)(1 + e_{12}) \quad [\text{usando } e_{12}e_1 = -e_2] \quad (60)$$

$$= \frac{1}{2}(e_1 + e_1e_{12} + e_2 + e_2e_{12}) \quad (61)$$

$$= \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_2 - e_1) = e_2 \quad (62)$$

Resultado: $e_1 \xrightarrow{90} e_2$



Exemplo 2: Rotação de 60° no plano e_2e_3 (em torno de e_1)

$\hat{B} = e_{23}$, $\theta = 60 = \pi/3$:

$$R = \cos(30) - e_{23} \sin(30) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}e_{23} \quad (63)$$

Aplicando sobre $v = e_2$:

$$v' = R e_2 \tilde{R} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}e_{23} \right) e_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}e_{23} \right) \quad (64)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_{23}e_2 \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}e_{23} \right) \quad (65)$$

Usando $e_{23}e_2 = e_2e_2e_3(-1) = -e_3...$ simplificando:

$$v' = \frac{1}{2}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 = \cos(60)e_2 + \sin(60)e_3 \quad (66)$$

Exemplo 3: Rotação em eixo arbitrário (45° em torno de $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$)

O plano de rotação perpendicular a $\hat{n}$ é o **dual** de $\hat{n}$:

$$\hat{B} = \hat{n}I^{-1} = -\hat{n}I = -\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)e_{123} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_{23} + e_{31} + e_{12}) \quad (67)$$

Verificação: $\hat{B}^2 = -1$. Rotor:

$$R = \cos(22.5) - \frac{\sin(22.5)}{\sqrt{3}}(e_{23} + e_{31} + e_{12}) \quad (68)$$

6.4 Composição de Rotações

Para rotações sucessivas R_1 depois R_2 :

$$v'' = R_2(R_1 v \tilde{R}_1) \tilde{R}_2 = (R_2 R_1) v (\tilde{R}_1 \tilde{R}_2) = R_{\text{total}} v \tilde{R}_{\text{total}} \quad (69)$$

Logo: $\boxed{R_{\text{total}} = R_2 R_1}$ (aplica R_1 primeiro, depois R_2 — ordem importa!).

Exemplo: Rotação de 90° em e_{12} seguida de 90° em e_{23} :

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e_{12}), \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e_{23}) \quad (70)$$

$$R_{\text{total}} = R_2 R_1 = \frac{1}{2}(1 - e_{23})(1 - e_{12}) \quad (71)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e_{12} - e_{23} + e_{23}e_{12}) \quad (72)$$

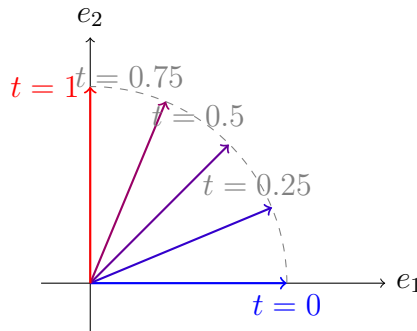
$$= \frac{1}{2}(1 - e_{12} - e_{23} - e_{31}) \quad (73)$$

Isto representa uma rotação de 120° em torno do eixo $(1, 1, 1)/\sqrt{3}$ — uma simetria do cubo!

6.5 Interpolação de Rotações (SLERP)

Para interpolar suavemente entre R_0 (identidade) e R_1 :

$$\boxed{R(t) = R_0(R_0^{-1}R_1)^t = e^{-\hat{B}\theta t/2}, \quad t \in [0, 1]} \quad (74)$$



A interpolação é geodésica na esfera de rotores — velocidade angular constante (sem aceleração espúria dos ângulos de Euler).

Propriedade	Matrizes 3×3	Ângulos de Euler	Rotores (GA)
Parâmetros	9 (com restrições)	3	4 (com $ R = 1$)
Composição	Multiplicação 3×3	Complicada	Produto geométrico
Gimbal lock	Não	Sim	Não
Interpolação	Difícil	Não-uniforme	SLERP (geodésica)
Generalização nD	$n \times n$	Não existe	Natural
Dupla cobertura	Não	Não	Sim (R e $-R$)

6.6 Vantagens sobre Matrizes de Rotação

6.7 Rotores e Quatérnions

Em $\mathcal{Cl}(3,0)$, os rotores (elementos pares com $R\tilde{R} = 1$) são isomorfos aos quatérnions unitários:

$$R = a + b e_{23} + c e_{31} + d e_{12}, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad (75)$$

com a identificação $\mathbf{i} = e_{23}$, $\mathbf{j} = e_{31}$, $\mathbf{k} = e_{12}$.

A GA **supera** os quatérnions porque:

- Quatérnions só funcionam em 3D. Rotores funcionam em qualquer dimensão.
- Quatérnions são uma "receita" sem geometria óbvia. Rotores são planos de rotação exponenciados.
- Na GA, o mesmo framework lida com reflexões, rotações, boosts, translações, dilatações.

7 Boosts de Lorentz como Rotores Hiperbólicos

7.1 A Ideia Central

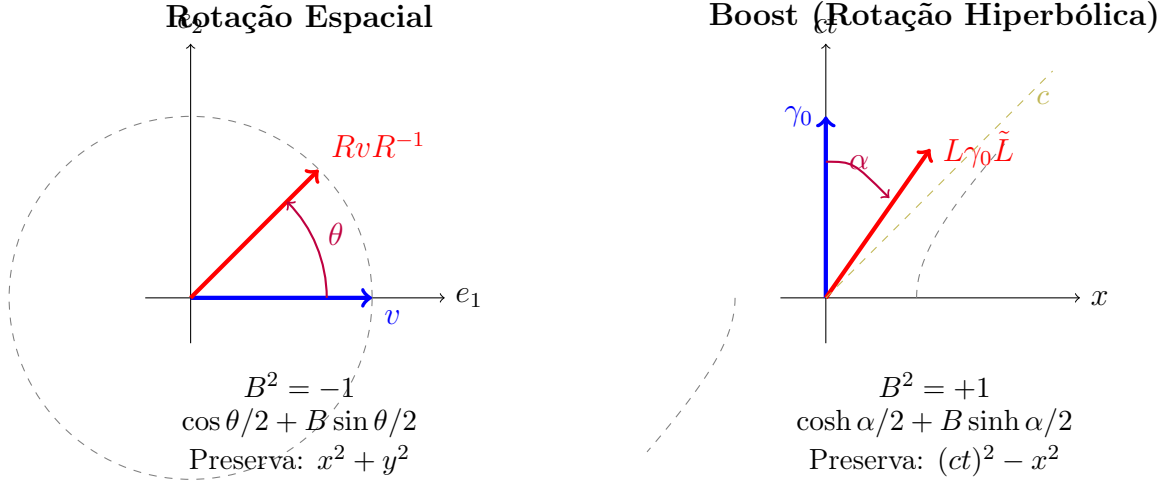
Na álgebra do espaço-tempo (STA), um boost é uma **rotação hiperbólica** num plano espaço-temporal. Enquanto rotações espaciais usam bivectores espaciais (e_{12}, e_{23}, e_{31}) que satisfazem $B^2 = -1$, boosts usam bivectores espaço-temporais ($\gamma_0\gamma_1, \gamma_0\gamma_2, \gamma_0\gamma_3$) que satisfazem $B^2 = +1$.

Isto muda $\cos / \sin$ para $\cosh / \sinh$:

$$L = e^{\hat{b}\alpha/2} = \cosh \frac{\alpha}{2} + \hat{b} \sinh \frac{\alpha}{2} \quad (76)$$

onde $\hat{b}$ é o bivetor unitário espaço-temporal (ex: $\hat{b} = \gamma_0 \gamma_1$ para boost em x) e α é a **rapidez** ($\tanh \alpha = v/c$).

7.2 Comparação: Rotação vs. Boost



7.3 Exemplo Detalhado: Boost em x com $v = 0.6c$

Rapidez: $\alpha = \operatorname{arctanh}(0.6) = 0.6931$. Fator de Lorentz: $\gamma = \cosh \alpha = 1.25$.

Na STA, com $\sigma_1 = \gamma_1 \gamma_0$ (bivetor espaço-temporal relativo):

$$L = e^{\sigma_1 \alpha/2} = \cosh(0.3466) + \sigma_1 \sinh(0.3466) = 1.0607 + 0.3536 \sigma_1 \quad (77)$$

Transformação da 4-velocidade de uma partícula em repouso ($v = \gamma_0$):

$$v' = L \gamma_0 \tilde{L} = (1.0607 + 0.3536 \sigma_1) \gamma_0 (1.0607 - 0.3536 \sigma_1) \quad (78)$$

$$= \gamma_0 (1.0607 + 0.3536 \sigma_1) (1.0607 + 0.3536 \sigma_1) \quad (79)$$

$$= \gamma_0 e^{\sigma_1 \alpha} = \gamma_0 (\cosh \alpha + \sigma_1 \sinh \alpha) \quad (80)$$

$$= 1.25 \gamma_0 + 0.75 \gamma_0 \sigma_1 = 1.25 \gamma_0 + 0.75 \gamma_1 \quad (81)$$

Em componentes: $v' = \gamma(c \gamma_0 + v \gamma_1)$ com $\gamma = 1.25$, $v = 0.6c$.

Contração do comprimento: Uma barra de comprimento L_0 em repouso (bivetor $x = L_0 \gamma_1$):

$$x' = L x \tilde{L} \implies L_{\text{obs}} = L_0 / \gamma = L_0 \times 0.8 \quad (82)$$

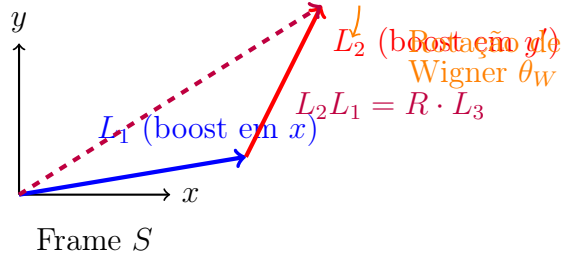
Dilatação temporal: Um intervalo temporal próprio $\Delta\tau$ (vetor $\Delta\tau \gamma_0$):

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau = 1.25 \Delta\tau \quad (83)$$

7.4 Composição de Boosts e Rotação de Wigner

Dois boosts não-colineares resultam em um boost MAIS uma rotação (precessão de Thomas-Wigner):

Composição de Boosts Não-Colineares



$$L_2 L_1 = R_W \cdot L_3 \quad (84)$$

onde R_W é o rotor de Wigner e L_3 é o boost resultante. Na GA, isto é imediato: basta multiplicar os rotores e separar as partes par-temporal (boost) e par-espacial (rotação).

Exemplo numérico: Boost de $0.5c$ em x seguido de $0.5c$ em y :

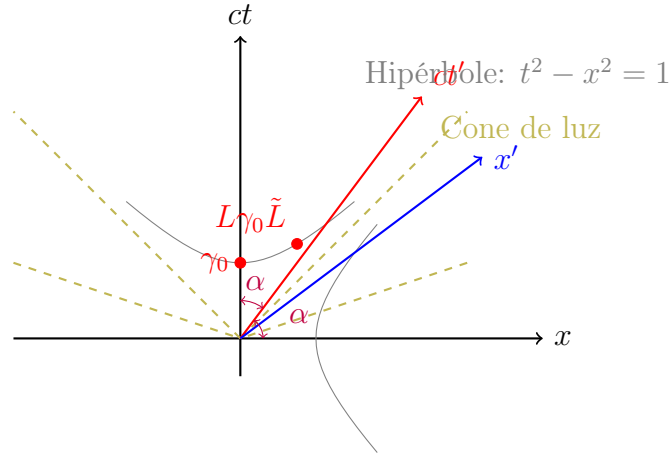
$$L_1 = \cosh(\alpha_1/2) + \sigma_1 \sinh(\alpha_1/2), \quad \alpha_1 = \operatorname{arctanh}(0.5) \quad (85)$$

$$L_2 = \cosh(\alpha_2/2) + \sigma_2 \sinh(\alpha_2/2), \quad \alpha_2 = \operatorname{arctanh}(0.5) \quad (86)$$

$$L_2 L_1 = \underbrace{(\text{parte escalar} + \text{bivetores espaciais})}_{R_W} \cdot \underbrace{(\text{parte escalar} + \sigma_k)}_{L_3} \quad (87)$$

A componente $e_{12} = \sigma_1 \sigma_2$ no produto é a rotação de Wigner — surge automaticamente!

7.5 Diagrama de Minkowski: Boost como Rotação Hiperbólica



O boost "roda" os eixos ct e x simetricamente em direção ao cone de luz (ambos por ângulo α). A hipérbole invariante $t^2 - x^2 = 1$ é o análogo do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ para rotações.

7.6 Tabela Resumo: Rotações vs. Boosts

	Rotação Espacial	Boost de Lorentz
Plano	Espacial ($e_i e_j$)	Espaço-temporal ($\gamma_0 \gamma_k$)
Bivetor B	$B^2 = -1$	$B^2 = +1$
Rotor	$e^{-B\theta/2}$	$e^{B\alpha/2}$
Expansão	$\cos \theta/2 - B \sin \theta/2$	$\cosh \alpha/2 + B \sinh \alpha/2$
Parâmetro	Ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$	Rapidez $\alpha \in (-\infty, +\infty)$
Invariante	$x^2 + y^2$ (círculo)	$t^2 - x^2$ (hipérbole)
Grupo	$\text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2)$	$\text{Spin}^+(1, 1) \cong \mathbb{R}^+$
Compacto?	Sim (periódico em θ)	Não (ilimitado em α)

Parte II

Álgebras Geométricas Específicas

1 $\mathcal{Cl}(2, 0)$ — Álgebra do Plano Euclidiano

Base: $\{1, e_1, e_2, e_{12}\}$, com $e_1^2 = e_2^2 = 1$, $e_{12}^2 = -1$.

O pseudoescalar $I = e_{12}$ comporta-se como a unidade imaginária. Assim, $\mathcal{Cl}(2, 0) \cong \mathbb{R}(2)$ (matrizes 2×2 reais), e os elementos pares $\mathcal{Cl}^+(2, 0) \cong \mathbb{C}$ — os números complexos emergem naturalmente!

Um rotor no plano:

$$R = e^{-I\theta/2} = \cos \frac{\theta}{2} - I \sin \frac{\theta}{2} \quad (88)$$

2 $\mathcal{Cl}(3, 0)$ — Álgebra do Espaço Euclidiano 3D

Base: $\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$ — dimensão 8.

- 1 escalar, 3 vetores, 3 bivectores, 1 pseudoescalar ($I = e_{123}$).
- $I^2 = -1$, I comuta com todos os elementos.
- Bivectores representam planos de rotação: e_{12} é o plano xy , etc.
- $\mathcal{Cl}^+(3, 0) \cong \mathbb{H}$ (quatérnions).

Relação com produto vetorial:

$$a \times b = -I(a \wedge b), \quad a \wedge b = I(a \times b) \quad (89)$$

Relação com eletromagnetismo vetorial:

As equações de Maxwell em forma vetorial usam implicitamente a dualidade de $\mathcal{Cl}(3, 0)$: o campo magnético $\mathbf{B}$ é na verdade um bivector $B = B_1 e_{23} + B_2 e_{31} + B_3 e_{12}$, não um vetor.

3 $\mathcal{Cl}(0, 1)$ e $\mathcal{Cl}(0, 2)$ — Complexos e Quatérnions

- $\mathcal{Cl}(0, 1)$: Base $\{1, e_1\}$ com $e_1^2 = -1$. Isomorfo a $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{Cl}(0, 2)$: Base $\{1, e_1, e_2, e_{12}\}$ com $e_1^2 = e_2^2 = -1$, $e_{12}^2 = -1$. Isomorfo a $\mathbb{H}$ (quatérnions).

4 Tabela de Isomorfismos

Álgebra	Dim	$\dim = 2^n$	Isomorfismo
$\mathcal{Cl}(0, 0)$	0	1	$\mathbb{R}$
$\mathcal{Cl}(0, 1)$	1	2	$\mathbb{C}$
$\mathcal{Cl}(0, 2)$	2	4	$\mathbb{H}$
$\mathcal{Cl}(1, 0)$	1	2	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
$\mathcal{Cl}(2, 0)$	2	4	$\mathbb{R}(2)$
$\mathcal{Cl}(3, 0)$	3	8	$\mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$
$\mathcal{Cl}(1, 3)$	4	16	$\mathbb{R}(4)$
$\mathcal{Cl}(3, 1)$	4	16	$\mathbb{R}(4)$
$\mathcal{Cl}(4, 1)$	5	32	$\mathbb{C}(4)$

Tabela 2: Isomorfismos de álgebras de Clifford com álgebras matriciais.

5 Periodicidade de Bott

As álgebras de Clifford possuem periodicidade:

$$\boxed{\mathcal{Cl}(p+8, q) \cong \mathcal{Cl}(p, q) \otimes \mathbb{R}(16), \quad \mathcal{Cl}(p, q+8) \cong \mathcal{Cl}(p, q) \otimes \mathbb{R}(16)} \quad (90)$$

Esta periodicidade mod 8 está profundamente conectada à classificação dos isolan-

tes topológicos (tabela periódica dos isolantes topológicos).

Parte III

Álgebra do Espaço Físico — APS

$\mathcal{Cl}(3, 0)$

1 Formulação de Pauli na APS

A APS (*Algebra of Physical Space*) usa $\mathcal{Cl}(3, 0)$ para descrever a física 3D relativística. Identificamos os vetores de base com as matrizes de Pauli:

$$e_1 \leftrightarrow \sigma_1, \quad e_2 \leftrightarrow \sigma_2, \quad e_3 \leftrightarrow \sigma_3 \quad (91)$$

satisfazendo $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$.

1.1 Paravectores

Na APS, um evento do espaço-tempo é representado como um **paravetor** (escalar + vetor):

$$\boxed{p = p^0 + p^1 e_1 + p^2 e_2 + p^3 e_3 = ct + \mathbf{x}} \quad (92)$$

O intervalo relativístico:

$$p\bar{p} = (ct)^2 - |\mathbf{x}|^2 = s^2 \quad (93)$$

onde $\bar{p} = p^0 - \mathbf{x}$ é a conjugação de paravetor.

1.2 Transformações de Lorentz na APS

Uma transformação de Lorentz é representada por:

$$\boxed{p' = \Lambda p \bar{\Lambda}^\dagger} \quad (94)$$

onde Λ é um elemento de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ representado na álgebra par.

Boost na direção $\hat{n}$ com rapidez ϕ :

$$\Lambda = e^{\hat{n}\phi/2} = \cosh \frac{\phi}{2} + \hat{n} \sinh \frac{\phi}{2} \quad (95)$$

Rotação no plano de B por ângulo θ :

$$\Lambda = e^{-IB\theta/2} = \cos \frac{\theta}{2} - IB \sin \frac{\theta}{2} \quad (96)$$

2 Eletromagnetismo na APS

O campo eletromagnético é um bivetor 3D (com parte real e imaginária geométrica):

$$\boxed{F = \mathbf{E} + Ic\mathbf{B}} \quad (97)$$

onde $\mathbf{E}$ é um vetor e IB é um bivetor. As equações de Maxwell unificam-se em:

$$\boxed{\bar{\nabla} F = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \mu_0 \mathbf{J}} \quad (98)$$

onde $\bar{\nabla} = \frac{1}{c}\partial_t - \nabla$ é o operador paravetor.

3 Spinors na APS

Um spinor de Pauli é um elemento par de $\mathcal{Cl}(3, 0)$:

$$\psi = a_0 + a_1 e_{23} + a_2 e_{31} + a_3 e_{12}, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (99)$$

que é equivalente a um quatérnion. A equação de Pauli pode ser escrita inteira-

mente em termos da álgebra geométrica sem matrizes.

Parte IV

Álgebra do Espaço-Tempo — STA

$\mathcal{Cl}(1, 3)$

1 Estrutura da STA

A **Spacetime Algebra** (STA) é $\mathcal{Cl}(1, 3)$, gerada por $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ com:

$$\boxed{\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}, \quad \eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)} \quad (100)$$

A álgebra tem dimensão $2^4 = 16$:

Grau	Elementos	Quantidade
0 (escalar)	1	1
1 (vetores)	γ_μ	4
2 (bivetores)	$\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$	6
3 (trivetores)	$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho$	4
4 (pseudoescalar)	$I = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$	1

1.1 Vetores Relativos (Frame γ_0)

Dado um observador com 4-velocidade γ_0 , definimos os **vetores relativos**:

$$\sigma_k = \gamma_k \gamma_0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (101)$$

Estes satisfazem $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$, gerando $\mathcal{Cl}(3, 0)$ como subálgebra par de $\mathcal{Cl}(1, 3)$:

$$\boxed{\mathcal{C}\ell^+(1, 3) \cong \mathcal{C}\ell(3, 0)} \quad (102)$$

1.2 Decomposição Espaço-Temporal

Um evento $x = x^\mu \gamma_\mu$ é decomposto relativamente a γ_0 :

$$x\gamma_0 = x \cdot \gamma_0 + x \wedge \gamma_0 = ct + \mathbf{x} \quad (103)$$

onde $ct = x^0$ (escalar) e $\mathbf{x} = x^k \boldsymbol{\sigma}_k$ (vetor relativo, bivetor na STA).

2 Transformações de Lorentz na STA

2.1 Rotores de Lorentz

Uma transformação de Lorentz é um rotor L (elemento par com $L\tilde{L} = 1$):

$$\boxed{x' = Lx\tilde{L}} \quad (104)$$

Boost com rapidez α na direção $\boldsymbol{\sigma}_k$:

$$L = e^{\boldsymbol{\sigma}_k \alpha/2} = \cosh \frac{\alpha}{2} + \boldsymbol{\sigma}_k \sinh \frac{\alpha}{2} \quad (105)$$

Rotação espacial no plano $\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j$ por ângulo θ :

$$L = e^{-\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j \theta/2} = \cos \frac{\theta}{2} - \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j \sin \frac{\theta}{2} \quad (106)$$

Os 6 bivetores da STA são geradores do grupo de Lorentz: 3 boosts ($\boldsymbol{\sigma}_k$) e 3 rotações ($I\boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_k$).

Os 6 Bivetores da STA

Boosts ($B^2 = +1$) $\sigma_1 = \gamma_1 \gamma_0$ $\sigma_2 = \gamma_2 \gamma_0$ $\sigma_3 = \gamma_3 \gamma_0$ Planos tempo-espço $e^{+B\alpha/2} = \cosh + B \sinh$	Rotações ($B^2 = -1$) $I\sigma_1 = \sigma_2 \sigma_3 = \gamma_2 \gamma_3$ $I\sigma_2 = \sigma_3 \sigma_1 = \gamma_3 \gamma_1$ $I\sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2 = \gamma_1 \gamma_2$ Planos espaço-espço $e^{-B\theta/2} = \cos - B \sin$
--	--

Exemplo completo de boost na STA:

Boost de rapidez α na direção x ($\sigma_1 = \gamma_1 \gamma_0$):

$$L = e^{\sigma_1 \alpha/2}, \quad \tilde{L} = e^{-\sigma_1 \alpha/2} \quad (107)$$

Ação sobre a base temporal:

$$\gamma'_0 = L \gamma_0 \tilde{L} = e^{\sigma_1 \alpha/2} \gamma_0 e^{-\sigma_1 \alpha/2} \quad (108)$$

$$= \gamma_0 e^{\sigma_1 \alpha/2} e^{-\sigma_1 \alpha/2} \quad ??? \quad (109)$$

Truque: $\sigma_1 \gamma_0 = \gamma_1 \gamma_0 \gamma_0 = \gamma_1$, e $\gamma_0 \sigma_1 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_0 = -\gamma_1 \gamma_0 \gamma_0 = -\gamma_1 \dots$ portanto γ_0 **anticomuta** com σ_1 ! Logo:

$$L \gamma_0 \tilde{L} = e^{\sigma_1 \alpha/2} \gamma_0 e^{-\sigma_1 \alpha/2} = \gamma_0 e^{-\sigma_1 \alpha/2} e^{\sigma_1 \alpha/2} \quad (110)$$

$$= \gamma_0 e^{-\sigma_1 \alpha} = \gamma_0 (\cosh \alpha - \sigma_1 \sinh \alpha) \quad (111)$$

$$= \cosh \alpha \gamma_0 - \sinh \alpha \gamma_1 = \gamma (\gamma_0 - \beta \gamma_1) \quad (112)$$

Este é exatamente a 4-velocidade de um observador movendo-se com velocidade $v = c \tanh \alpha$ na direção x . ✓

2.2 Grupo de Lorentz e Spin

Os rotores formam $\text{Spin}^+(1,3) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})$, a cobertura dupla de $\text{SO}^+(1,3)$. A dupla cobertura manifesta-se em: L e $-L$ produzem a mesma transformação de Lorentz, mas diferem na ação sobre spinors.

3 Eletromagnetismo na STA

3.1 Tensor de Faraday como Bivector

O campo eletromagnético é um **bivector** na STA:

$$\boxed{F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu = \mathbf{E} + I\mathbf{B}} \quad (113)$$

onde, relativo a γ_0 :

$$\mathbf{E} = E^k \boldsymbol{\sigma}_k = F \cdot \gamma_0, \quad I\mathbf{B} = B^k I\boldsymbol{\sigma}_k = F \wedge \gamma_0 / \gamma_0 \quad (114)$$

3.2 Equações de Maxwell

Todas as quatro equações de Maxwell unificam-se em uma única equação:

$$\boxed{\nabla F = J} \quad (115)$$

onde $\nabla = \gamma^\mu \partial_\mu$ é o operador vetorial do espaço-tempo e $J = J^\mu \gamma_\mu$ é a 4-corrente. Expandindo:

$$\nabla \cdot F + \nabla \wedge F = J \quad (116)$$

- $\nabla \cdot F = J$ contém as equações com fontes (Gauss e Ampère-Maxwell).
- $\nabla \wedge F = 0$ contém as equações homogêneas (Gauss magnética e Faraday).

3.3 Invariantes do Campo

$$F^2 = F \cdot F + F \wedge F = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + 2I(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \quad (117)$$

Os dois invariantes de Lorentz são a parte escalar e pseudoescalar de F^2 .

3.4 Força de Lorentz

Para uma partícula com 4-velocidade $v = \dot{x}$:

$$\boxed{m\dot{v} = \frac{q}{c}F \cdot v} \quad (118)$$

3.5 Onda Eletromagnética

Uma onda plana:

$$F = fe^{I(k \cdot x)}, \quad k^2 = 0, \quad k \cdot f = 0 \quad (119)$$

onde f é um bivector constante (polarização) e k é o 4-vetor de onda nulo.

4 Equação de Dirac na STA

4.1 Formulação sem Matrizes

Na STA, o spinor de Dirac é um elemento par $\psi \in \mathcal{C}\ell^+(1,3)$ (8 componentes reais). A equação de Dirac:

$$\boxed{\nabla\psi I\sigma_3 - eA\psi = m\psi\gamma_0} \quad (120)$$

onde $I\sigma_3$ define o plano de spin. Esta forma é completamente equivalente à equação matricial $(\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m)\Psi = 0$, mas sem representações matriciais.

4.2 Decomposição Canônica do Spinor

Todo spinor de Dirac pode ser decomposto como:

$$\boxed{\psi = (\rho e^{I\beta})^{1/2} R} \quad (121)$$

onde:

- $\rho = \psi\tilde{\psi}\rangle_0$ é a densidade (escalar).
- β é o **parâmetro de Yvon-Takabayasi** (pseudoescalar), $\beta = 0$ para elétrons positivos, $\beta = \pi$ para pósitrons.
- R é um rotor de Lorentz ($R\tilde{R} = 1$), codificando a 4-velocidade e orientação de spin.

4.3 Observáveis de Dirac

Os bilineares de Dirac na linguagem da STA:

$$J = \psi \gamma_0 \tilde{\psi} = \rho v \quad (4\text{-corrente de probabilidade}) \quad (122)$$

$$s = \psi \gamma_3 \tilde{\psi} = \rho R \gamma_3 \tilde{R} \quad (4\text{-vetor de spin}) \quad (123)$$

$$S = \psi I \sigma_3 \tilde{\psi} \quad (\text{bivetor de spin}) \quad (124)$$

5 Gravitação na STA

5.1 Teoria Gauge da Gravidade (GTG)

Hestenes e Lasenby-Doran-Gull formularam a gravitação como teoria gauge na STA usando dois campos gauge:

- $\underline{h}(a)$: Campo de posição (gauge translacional), um mapa linear $a \mapsto \underline{h}(a)$.
- $\Omega(a)$: Campo de conexão (gauge rotacional), um bivetor.

A derivada covariante gauge:

$$\mathcal{D}_a \psi = a \cdot \nabla \psi + \frac{1}{2} \Omega(a) \psi \quad (125)$$

O tensor de Riemann é o campo de curvatura:

$$\mathcal{R}(a \wedge b) = \partial_a \Omega_b - \partial_b \Omega_a + \Omega_a \times \Omega_b \quad (126)$$

As equações de Einstein emergem como:

$$\boxed{\mathcal{G}(a) = \mathcal{R}(a) - \frac{1}{2} a \mathcal{R} = 8\pi G \mathcal{T}(a)} \quad (127)$$

onde $\mathcal{R}(a) = \partial^b \cdot \mathcal{R}(b \wedge a)$ e $\mathcal{R} = \partial^a \cdot \mathcal{R}(a)$.

Parte V

Álgebra Geométrica Conforme — CGA

$\mathcal{Cl}(4, 1)$

1 Construção do Modelo Conforme

A **Álgebra Geométrica Conforme** (CGA) estende o espaço euclidiano 3D adicionando duas dimensões extras para representar o grupo conforme linearmente. Usamos $\mathcal{Cl}(4, 1)$ com base $\{e_1, e_2, e_3, e_+, e_-\}$:

$$e_+^2 = +1, \quad e_-^2 = -1, \quad e_+ \cdot e_- = 0 \quad (128)$$

Definimos os vetores nulos:

$$e_o = \frac{1}{2}(e_- - e_+), \quad e_\infty = e_- + e_+ \quad (129)$$

com propriedades:

$$e_o^2 = 0, \quad e_\infty^2 = 0, \quad e_o \cdot e_\infty = -1 \quad (130)$$

1.1 Mapeamento Conforme

Um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ é mapeado para o espaço conforme como:

$$X = F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_o \quad (131)$$

Note que $X^2 = 0$ (todos os pontos são vetores nulos na CGA). A distância entre pontos é codificada no produto interno:

$$X \cdot Y = -\frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \quad (132)$$

1.2 Objetos Geométricos como Multivetores

Na CGA, objetos geométricos de diferentes dimensões são representados uniformemente:

Objeto	Representação	Condição
Ponto	$X = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_o$	Vetor nulo
Par de pontos	$X_1 \wedge X_2$	2-blade nulo
Reta	$X_1 \wedge X_2 \wedge e_\infty$	3-blade com e_∞
Círculo	$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$	3-blade nulo
Plano	$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge e_\infty$	4-blade com e_∞
Esfera	$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4$	4-blade nulo

Tabela 3: Objetos geométricos na CGA.

2 Representação Dual (IPNS)

Na representação IPNS (*Inner Product Null Space*), os objetos são representados por vetores cujo produto interno com pontos da superfície é zero:

Esfera de centro $\mathbf{c}$ e raio r :

$$S = C - \frac{1}{2}r^2 e_\infty \quad (133)$$

onde $C = F(\mathbf{c})$ é o centro mapeado. Um ponto X está na esfera se $X \cdot S = 0$.

Plano com normal $\hat{n}$ e distância d da origem:

$$\pi = \hat{n} + d e_\infty \quad (134)$$

Um plano é uma esfera de raio infinito (passa por e_∞).

Círculo: Interseção de duas esferas = bivetor $S_1 \wedge S_2$ (na OPNS) ou $S_1 \wedge S_2$ (via dual).

Reta: Interseção de dois planos = caso especial de círculo passando por e_∞ .

3 Transformações Conformes como Rotores

Todas as transformações conformes são **rotores** na CGA:

3.1 Translação

$$T_{\mathbf{a}} = e^{-e_{\infty}\mathbf{a}/2} = 1 - \frac{1}{2}e_{\infty}\mathbf{a} \quad (135)$$

Ação: $X' = T_{\mathbf{a}}X\tilde{T}_{\mathbf{a}}$.

3.2 Rotação

$$R = e^{-B\theta/2} \quad (136)$$

onde B é um bivector euclidiano (plano de rotação).

3.3 Dilatação

$$D_{\lambda} = e^{-e_{\infty}\wedge e_o \ln \lambda/2} = e^{E \ln \lambda/2} \quad (137)$$

onde $E = e_{\infty} \wedge e_o$.

3.4 Inversão

A inversão no ponto e_o :

$$X' = -e_+ X e_+ \quad (138)$$

3.5 Reflexão em Superfície

Reflexão de um ponto X na esfera/plano S :

$$X' = -SXS^{-1} \quad (139)$$

4 Interseção de Objetos na CGA

A interseção de dois objetos na representação OPNS (*Outer Product Null Space*) é obtida pelo **meet** (produto regressivo):

$$A \vee B = (A^* \wedge B^*)^* \quad (140)$$

onde $*$ denota o dual. Exemplos:

- Interseção de duas esferas = círculo.
- Interseção de esfera com plano = círculo.
- Interseção de dois planos = reta.
- Interseção de três esferas = par de pontos.

5 Aplicações da CGA

- **Robótica:** Cinemática inversa, planejamento de trajetória em termos de interseções geométricas.
- **Visão computacional:** Calibração de câmeras, reconstrução 3D.
- **Computação gráfica:** Ray-tracing via interseção de esferas e planos.
- **Física:** Simetria conforme em teoria de campos, geometria de Twistors.

Parte VI

Álgebra Geométrica Projetiva — PGA

$\mathcal{Cl}(3, 0, 1)$

1 Motivação e Construção

A **Álgebra Geométrica Projetiva** (PGA) usa uma dimensão extra com métrica **degenerada** (quadrado zero) para representar geometria euclidiana afim. Usamos $\mathcal{Cl}(3, 0, 1)$ com base $\{e_1, e_2, e_3, e_0\}$:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, \quad e_0^2 = 0 \quad (141)$$

A dimensão nula e_0 representa o "ponto no infinito" da geometria projetiva. A álgebra tem dimensão $2^4 = 16$.

1.1 Vantagens sobre a CGA

- Mais leve computacionalmente (16 componentes vs. 32 da CGA).
- Suficiente para geometria euclidiana plana e 3D (translações, rotações, reflexões).
- Não inclui dilatações ou inversões (que nem sempre são desejadas).
- Ideal para engenharia, física clássica e computação gráfica.

2 Elementos Geométricos na PGA

Na PGA 3D, os objetos fundamentais são:

2.1 Pontos

Um ponto euclidiano $\mathbf{p} = (x, y, z)$ é representado como um **trivetor**:

$$\boxed{P = e_{123} + x e_{032} + y e_{013} + z e_{021}} \quad (142)$$

ou na notação normalizada: $P = e_{123} + p_1 e_{032} + p_2 e_{013} + p_3 e_{021}$.

2.2 Planos

Um plano $ax + by + cz + d = 0$ é um **vetor**:

$$\boxed{\pi = a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_0} \quad (143)$$

2.3 Retas

Uma reta é um **bivetor** (interseção de dois planos ou join de dois pontos):

$$L = \pi_1 \wedge \pi_2 \quad \text{ou} \quad L = P_1 \vee P_2 \quad (144)$$

Uma reta tem 6 componentes (coordenadas de Plücker):

$$L = d_{01}e_{01} + d_{02}e_{02} + d_{03}e_{03} + m_{12}e_{12} + m_{13}e_{13} + m_{23}e_{23} \quad (145)$$

onde $\mathbf{d} = (d_{01}, d_{02}, d_{03})$ é a direção e $\mathbf{m} = (m_{23}, m_{13}, m_{12})$ é o momento.

3 Transformações na PGA

3.1 Reflexão em Plano

$$X' = \pi X \pi \quad (146)$$

3.2 Rotação (Composição de Reflexões em Planos Concorrentes)

$$R = \pi_2 \pi_1 = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} L \quad (147)$$

onde L é a reta de interseção dos planos e θ é o dobro do ângulo entre eles.

3.3 Translação (Composição de Reflexões em Planos Paralelos)

$$\boxed{T = 1 + \frac{1}{2}d e_0 \hat{n} = 1 + \frac{d}{2}(n_1 e_{01} + n_2 e_{02} + n_3 e_{03})} \quad (148)$$

Note: $T\tilde{T} = 1$ (é um rotor). A translação é uma "rotação com eixo no infinito".

3.4 Motor (Transformação Rígida Geral)

Uma transformação rígida geral (rotação + translação) é um **motor**:

$$\boxed{M = TR = e^{-Ld/2} \cdot e^{-L\theta/2}} \quad (149)$$

Para uma reta L no espaço, o motor que roto-translada ao longo de L :

$$M = e^{-(d/2 + \theta/2)L} \quad (150)$$

Ação sobre qualquer elemento: $X' = MX\tilde{M}$.

4 Métrica e Distância na PGA

A distância entre dois pontos normalizados P e Q :

$$d(P, Q) = \|P \vee Q\| \quad (151)$$

onde $\vee$ é o produto regressivo. O ângulo entre dois planos:

$$\cos \theta = \frac{\pi_1 \cdot \pi_2}{|\pi_1| |\pi_2|} \quad (152)$$

5 PGA 2D — $\mathcal{Cl}(2, 0, 1)$

Para geometria euclidiana plana, usamos $\{e_1, e_2, e_0\}$ com $e_0^2 = 0$:

- **Pontos:** Bivetores $P = e_{12} + x e_{02} + y e_{01}$ (representação homogênea).
- **Retas:** Vetores $\ell = a e_1 + b e_2 + c e_0$ (reta $ax + by + c = 0$).
- **Motor 2D:** $M = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}(a e_{12} + b e_{01} + c e_{02})$.

Parte VII

Aplicações na Mecânica Clássica

1 Mecânica de Corpo Rígido

1.1 Velocidade Angular como Bivetor

Na GA, a velocidade angular é naturalmente um **bivetor** Ω (plano de rotação), não um pseudovetor:

$$\dot{R} = -\frac{1}{2}\Omega R, \quad \Omega = 2\dot{R}\tilde{R} \quad (153)$$

A velocidade de um ponto no corpo rígido:

$$\mathbf{v} = \Omega \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{2}(\Omega \mathbf{r} - \mathbf{r} \Omega) \quad (154)$$

1.2 Equações de Euler

O momento angular $L = I(\Omega)$ onde I é o tensor de inércia (mapa linear bivetor $\rightarrow$ bivetor). As equações de Euler na GA:

$$\dot{L} + \Omega \times L = \tau \quad (155)$$

onde $\times$ denota o comutador de bivectores e τ é o torque externo (bivetor).

1.3 Giroscópio e Precessão

Para um giroscópio com eixo de spin $\hat{s}$ sob torque gravitacional:

$$\dot{\hat{s}} = \Omega_p \cdot \hat{s}, \quad \Omega_p = \frac{Mg\ell}{L_s} B_{\text{horizontal}} \quad (156)$$

A precessão é uma rotação no bivector horizontal, sem recorrer a "produtos vetoriais de pseudovetores".

2 Mecânica Orbital

O vetor de Laplace-Runge-Lenz na GA é mais naturalmente um bivector:

$$A = p \wedge L - mk\hat{r} \quad (157)$$

As simetrias do problema de Kepler são geradas pelos bivectores de $\mathcal{Cl}(4,0)$ (isomorfismo com $\text{SO}(4)$).

3 Mecânica Lagrangiana Geométrica

As equações de Euler-Lagrange para rotores:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0 \quad (158)$$

Para um rotor $R(t)$ descrevendo a orientação, com lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I(\Omega) \cdot \Omega - V(R) \quad (159)$$

Parte VIII

Aplicações na Mecânica Quântica

1 Equação de Schrödinger em GA

1.1 Eliminação da Unidade Imaginária

Na mecânica quântica convencional, $i\hbar$ aparece ubiquamente. Na GA, o papel de i é desempenhado por um **bivetor unitário** que representa o plano de spin:

$$i \leftrightarrow I\sigma_3 = e_1e_2 \quad (\text{em } \mathcal{Cl}(3,0)) \quad (160)$$

A equação de Schrödinger para spin-1/2:

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} I\sigma_3 \hbar = H\psi} \quad (161)$$

onde ψ é um elemento par de $\mathcal{Cl}(3,0)$ (equivalente a um spinor de Pauli de 2 componentes complexas = 4 reais).

1.2 Interpretação Geométrica do Spin

O spinor $\psi = \sqrt{\rho} R$ descreve:

- $\rho = |\psi|^2$: Densidade de probabilidade.
- R : Rotor que orienta um frame de referência local.
- O vetor de spin: $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} R\sigma_3\tilde{R}$ — uma direção no espaço real.

A precessão de Larmor: $\dot{R} = -\frac{e}{2mc} B R$ onde B é o bivetor do campo magnético.

2 Equação de Dirac (Revisitada)

2.1 Forma Hestenes

Na STA, a equação de Dirac livre:

$$\boxed{\nabla\psi I\sigma_3 = m\psi\gamma_0} \quad (162)$$

Interpretação: $\nabla\psi$ é a "derivada geométrica" do spinor, $I\sigma_3$ seleciona o plano de spin, γ_0 define o frame do observador, e m é a massa.

2.2 Corrente de Probabilidade

$$J = \psi\gamma_0\tilde{\psi}, \quad \nabla \cdot J = 0 \quad (163)$$

J é automaticamente um vetor tipo-tempo futuro (densidade de probabilidade positiva-definida).

2.3 Zitterbewegung

Na interpretação de GA, o Zitterbewegung é uma rotação literal do spinor no plano $I\sigma_3$ com frequência $\omega = 2mc^2/\hbar$:

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-I\sigma_3 mc^2 t/\hbar} \quad (164)$$

O elétron "gira" internamente no plano de spin — a fase quântica é rotação geométrica.

3 Teoria de Dirac-Hestenes e o Elétron

3.1 Frame Móvel do Elétron

O spinor define um **frame móvel** (tetrad) ao longo da linha de mundo:

$$e'_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R} = \psi\gamma_\mu\tilde{\psi}/\rho \quad (165)$$

- $e'_0 = v$ (4-velocidade, direção temporal do elétron).

- $e'_3 = s$ (direção de spin).
- e'_1, e'_2 giram no plano perpendicular ao spin com frequência $2m$.

3.2 Equação de Bargmann-Michel-Telegdi

A precessão relativística do spin em campo externo:

$$\dot{S} = \frac{e}{m} \left[\frac{g}{2} F \cdot S + \left(\frac{g}{2} - 1 \right) (v \wedge (F \cdot v)) \cdot S \right] \quad (166)$$

onde S é o bivector de spin e g é o fator giromagnético.

4 Oscilador Harmônico e Estados Coerentes

O oscilador harmônico quântico em GA usa o plano complexo como bivector real:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + Bp), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - Bp) \quad (167)$$

onde B é o bivector representando i . Estados coerentes são autoestados do operador

de aniquilação na álgebra real.

Parte IX

Cálculo Geométrico e Formas Diferenciais

1 Derivada Vetorial

1.1 Operador Nabla como Vetor

Na GA, o operador diferencial é um **vetor**:

$$\nabla = e^\mu \partial_\mu = \sum_i e^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (168)$$

onde $\{e^i\}$ é a base recíproca ($e^i \cdot e_j = \delta_j^i$). Sua ação sobre um campo F produz:

$$\boxed{\nabla F = \nabla \cdot F + \nabla \wedge F} \quad (169)$$

- $\nabla \cdot F$: Divergência generalizada (reduz o grau em 1).
- $\nabla \wedge F$: Rotacional generalizado (aumenta o grau em 1).

1.2 Exemplos Fundamentais

Para um campo escalar ϕ :

$$\nabla \phi = \nabla \wedge \phi = \text{grad}(\phi) \quad (\text{vetor}) \quad (170)$$

Para um campo vetorial $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla \mathbf{v} = \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}}_{\text{div (escalar)}} + \underbrace{\nabla \wedge \mathbf{v}}_{\text{rot (bivetor)}} \quad (171)$$

O dual do rotacional: $\nabla \times \mathbf{v} = -I(\nabla \wedge \mathbf{v})$.

Para um campo bivector B em $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla B = \underbrace{\nabla \cdot B}_{\text{vetor}} + \underbrace{\nabla \wedge B}_{\text{trivector=pseudoescalar}} \quad (172)$$

2 Teorema Fundamental do Cálculo Geométrico

A generalização do teorema de Stokes/Gauss/Green:

$$\boxed{\int_V |dV| \dot{\nabla} F(\dot{x}) = \oint_{\partial V} |dS| \hat{n} F(x)} \quad (173)$$

onde $\hat{n}$ é a normal exterior, $|dV|$ e $|dS|$ são os elementos de volume/superfície escalares, e o ponto indica que ∇ age apenas sobre F através de x .

Casos especiais:

- F escalar $\Rightarrow$ Teorema do gradiente.
- F vetor, parte escalar $\Rightarrow$ Teorema de Gauss (divergência).
- F vetor, parte bivector $\Rightarrow$ Teorema de Stokes (rotacional).

3 Formas Diferenciais na GA

3.1 Correspondência

Formas diferenciais correspondem a multivetores na álgebra recíproca:

$$dx^i \leftrightarrow e^i, \quad dx^i \wedge dx^j \leftrightarrow e^i \wedge e^j \quad (174)$$

A derivada exterior d corresponde a $\nabla \wedge$:

$$d\omega \leftrightarrow \nabla \wedge F \quad (175)$$

A co-derivada $\delta = *d*$ corresponde a $\nabla \cdot$:

$$\delta\omega \leftrightarrow \nabla \cdot F \quad (176)$$

3.2 Laplaciano Geométrico

$$\boxed{\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = (\nabla \cdot + \nabla \wedge)(\nabla \cdot + \nabla \wedge) = \nabla \cdot (\nabla \cdot) + \nabla \wedge (\nabla \wedge) + \text{termos cruzados}} \quad (177)$$

Em espaço plano: $\nabla^2 F = (\nabla \cdot \nabla)F$. O operador de Dirac-Kähler é ∇ agindo sobre o multivetor total.

4 Cálculo em Variedades Curvas

Em variedades com curvatura, o frame $\{e_\mu(x)\}$ depende da posição. A derivada covariante:

$$D_a F = a \cdot \nabla F + \omega(a) \times F \quad (178)$$

onde $\omega(a)$ é a conexão de spin (bivetor) e $\times$ é o produto comutador:

$$A \times B = \frac{1}{2}(AB - BA) \quad (179)$$

O tensor de curvatura de Riemann como bivetor:

$$R(a \wedge b) = D_a D_b - D_b D_a - D_{[a,b]} \quad (180)$$

Parte X

Aplicações no Eletromagnetismo

1 Formulação Completa de Maxwell na STA

1.1 Equação de Maxwell Unificada

$$\boxed{\nabla F = \mu_0 J} \quad (181)$$

Esta única equação contém as 4 equações de Maxwell. Expandindo $\nabla F = \nabla \cdot F + \nabla \wedge F$:

- $\nabla \cdot F = \mu_0 J$ (equações com fontes).
- $\nabla \wedge F = 0$ (equações homogêneas — Bianchi).

1.2 Potencial Eletromagnético

Como $\nabla \wedge F = 0$, existe A (vetor) tal que:

$$F = \nabla \wedge A = \nabla A - \nabla \cdot A \quad (182)$$

No gauge de Lorenz ($\nabla \cdot A = 0$):

$$F = \nabla A, \quad \nabla^2 A = \mu_0 J \quad (183)$$

1.3 Energia e Momento

O tensor energia-momento eletromagnético:

$$T(a) = -\frac{1}{2\mu_0} F a \tilde{F} \quad (184)$$

Para $a = \gamma_0$ (observador):

$$T(\gamma_0) = \frac{1}{2\mu_0} (E^2 + B^2) \gamma_0 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (185)$$

(densidade de energia + vetor de Poynting).

2 Óptica Geométrica e Polarização

2.1 Elipse de Polarização

O campo elétrico de uma onda é $\mathbf{E} = \text{Re}(f e^{i\phi})$ onde $f = f_1 + I f_2$ é um bivector complexo. A polarização é naturalmente descrita pelo bivector f :

- $f \wedge f = 0$ (polarização linear).
- $f \cdot f = 0$ (polarização circular).
- Caso geral: polarização elíptica.

2.2 Parâmetros de Stokes via GA

Os parâmetros de Stokes são componentes do bivector de coerência:

$$S = f f^\dagger = S_0 + S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2 + S_3 \sigma_3 \quad (186)$$

A esfera de Poincaré é naturalmente o espaço dos bivectores unitários.

3 Teoria de Antenas e Radiação

O campo de radiação de uma distribuição de corrente:

$$F_{\text{rad}}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} [\hat{r}, \dot{J}]_{\text{ret}} \quad (187)$$

onde $[\cdot]_{\text{ret}}$ indica avaliação no tempo retardado e o comutador geométrico garante a transversalidade.

Parte XI

Aplicações na Relatividade e Gravitação

1 Relatividade Especial na STA

1.1 Cinemática Relativística

A 4-velocidade é um vetor unitário tipo-tempo: $v^2 = 1$. A decomposição relativa a um observador γ_0 :

$$v = \gamma(1 + \boldsymbol{\beta})\gamma_0, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (188)$$

onde $\boldsymbol{\beta} = \beta^k \boldsymbol{\sigma}_k$ é a velocidade relativa (bivetor na STA, vetor no espaço do observador).

1.2 Adição Relativística de Velocidades

Para dois boosts consecutivos:

$$L_3 = L_2 L_1 = e^{\boldsymbol{\sigma}_2 \alpha_2 / 2} e^{\boldsymbol{\sigma}_1 \alpha_1 / 2} \quad (189)$$

Se os boosts não são colineares, o resultado contém uma rotação (precessão de Thomas-Wigner):

$$L_3 = e^{-I \boldsymbol{\sigma}_3 \theta_W / 2} e^{\hat{n} \alpha_3 / 2} \quad (190)$$

O ângulo de Wigner emerge naturalmente da não-comutatividade dos rotores de boost.

1.3 Precessão de Thomas

$$\boxed{\Omega_T = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \mathbf{a} \wedge \mathbf{v}} \quad (191)$$

Na GA, é simplesmente o bivector resultante da composição de boosts infinitesimais não-colineares.

2 Gravitação Gauge (GTG) — Detalhes

2.1 Campos Gauge

- **Campo de posição** $\bar{h}(a) = h(a, x)$: Mapa linear de vetores, generaliza a tetrad e_μ^a .
- **Campo de rotação** $\Omega(a) = \Omega_\mu^{ab} \gamma_a \gamma_b$: Conexão de spin (bivector-valorada).

2.2 Tensores de Curvatura e Torção

Torção:

$$\mathcal{T}(a \wedge b) = D_a \bar{h}(b) - D_b \bar{h}(a) \quad (192)$$

Curvatura:

$$\mathcal{R}(a \wedge b) = \partial_a \Omega_b - \partial_b \Omega_a + \Omega_a \times \Omega_b \quad (193)$$

2.3 Solução de Schwarzschild na STA

O campo gravitacional de Schwarzschild pode ser descrito por:

$$\bar{h}(e_t) = e_t + \sqrt{\frac{r_s}{r}} e_r, \quad \bar{h}(e_r) = e_r, \quad \bar{h}(e_\theta) = e_\theta, \quad \bar{h}(e_\phi) = e_\phi \quad (194)$$

onde $r_s = 2GM/c^2$. Esta forma (gauge de Gullstrand-Painlevé) é regular no horizonte!

2.4 Equação de Dirac em Espaço-Tempo Curvo

$$\bar{h}(\nabla)\psi I\sigma_3 - m\psi\gamma_0 + \Omega_\mu\psi = 0 \quad (195)$$

A conexão de spin Ω_μ acopla diretamente ao spinor — gravidade como gauge de rotações locais.

3 Ondas Gravitacionais na STA

Uma onda gravitacional linearizada na STA:

$$\bar{h}(a) = a + \frac{1}{2}\epsilon h(a)e^{ik \cdot x} \quad (196)$$

As duas polarizações $+$ e $\times$ correspondem a dois bivectores independentes no plano transversal.

Parte XII

Aplicações em Teoria de Campos e Partículas

1 Teoria de Gauge na GA

1.1 Campos de Gauge como Bivectores

O potencial de gauge de Yang-Mills é um campo bivector-valorado na álgebra do grupo:

$$A = A_\mu^a T_a \gamma^\mu \quad (197)$$

onde T_a são geradores da álgebra de Lie (bivectores numa álgebra de Clifford maior).

O campo de força:

$$F = \nabla \wedge A + A \wedge A \quad (198)$$

1.2 QED na STA

O lagrangiano de QED:

$$\mathcal{L} = \langle \nabla \psi I \sigma_3 \tilde{\psi} - e A \psi \gamma_0 \tilde{\psi} - m \psi \tilde{\psi} \rangle + \frac{1}{2} \langle F^2 \rangle \quad (199)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota a parte escalar e todas as quantidades são multivetores reais.

2 Spinors e Grupos de Lie

2.1 Álgebras de Lie como Bivetores

Os geradores de grupos de Lie são naturalmente bivectores na GA:

- $\text{SO}(3)$: 3 bivectores de $\mathcal{Cl}(3, 0)$: e_{12}, e_{23}, e_{31} .
- $\text{SO}(1, 3)$: 6 bivectores de $\mathcal{Cl}(1, 3)$: $\gamma_\mu \gamma_\nu$ ($\mu < \nu$).
- $\text{SU}(2)$: Isomorfo a $\text{Spin}(3)$, gerado por $I \sigma_k$ em $\mathcal{Cl}(3, 0)$.
- $\text{SU}(3)$: Pode ser representado em $\mathcal{Cl}(6, 0)$.

2.2 Classificação de Spinors

Spinor	Álgebra	Componentes reais	Descrição
Pauli	$\mathcal{Cl}^+(3, 0)$	4	Spin não-relativístico
Dirac	$\mathcal{Cl}^+(1, 3)$	8	Elétron relativístico
Majorana	$\mathcal{Cl}^+(3, 1)$	4	Férmion = antiférmion
Weyl	$\mathcal{Cl}^+(1, 3) _{\beta=0}$	4	Férmion sem massa (quiralidade definida)
Twistor	$\mathcal{Cl}^+(2, 4)$	8	Geometria twistorial

Tabela 4: Tipos de spinors e suas álgebras.

3 Supersimetria na GA

A superálgebra pode ser formulada usando a GA estendida. O superespaço é descrito por coordenadas bosônicas (vetores) e fermiônicas (spinors = elementos pares da álgebra). A derivada supercovariante:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + \theta^\beta \gamma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu \quad (200)$$

tem interpretação geométrica direta na álgebra.

4 Twistors e GA

A teoria de twistors de Penrose é naturalmente formulada em $\mathcal{Cl}(2, 4)$ (álgebra conforme do espaço-tempo). Um twistor é um spinor desta álgebra:

$$Z = \omega^A \oplus \pi_{A'} \quad \leftrightarrow \quad Z \in \mathcal{Cl}^+(2, 4) \quad (201)$$

A correspondência twistor associa pontos do espaço-tempo de Minkowski a retas no espaço de twistors — uma dualidade elegantemente descrita pela geometria projetiva

da CGA do espaço-tempo.

Parte XIII

Implementação Computacional

1 Representação e Armazenamento

1.1 Tabela de Multiplicação

Para $\mathcal{Cl}(p, q)$ com $n = p + q$, um multivetor geral tem 2^n componentes. A multiplicação é definida pela tabela de produtos de base:

$$(e_I)(e_J) = \text{sign}(I, J) e_{I \Delta J} \quad (202)$$

onde $I \Delta J$ é a diferença simétrica dos conjuntos de índices e $\text{sign}(I, J)$ depende das permutações necessárias e da métrica.

1.2 Complexidade Computacional

Álgebra	Componentes	Multiplicações por produto
$\mathcal{Cl}(2, 0)$	4	16
$\mathcal{Cl}(3, 0)$	8	64
$\mathcal{Cl}(3, 0, 1)$ (PGA)	16	256
$\mathcal{Cl}(1, 3)$ (STA)	16	256
$\mathcal{Cl}(4, 1)$ (CGA)	32	1024

Tabela 5: Custo computacional das álgebras geométricas.

2 Bibliotecas e Ferramentas

- **GAALOP** (*Geometric Algebra Algorithms Optimizer*): Otimiza código GA para execução eficiente.
- **GAViewer**: Visualização interativa de objetos em $\mathcal{Cl}(3,0)$ e CGA.
- **Clifford** (Python): Álgebra de Clifford numérica de propósito geral.
- **ganja.js**: Visualização e computação GA no navegador.
- **Klein** (C++): PGA otimizada para aplicações de tempo real.
- **Versor** (C++): GA de alta performance para computação gráfica.
- **GAlgebra** (Python/SymPy): Computação simbólica em GA.

3 Otimizações

3.1 Exploração de Esparsidade

Em muitas aplicações, apenas subconjuntos dos 2^n componentes são necessários:

- Rotores: Apenas elementos pares (2^{n-1} componentes).
- Vetores/bivetores: n ou $\binom{n}{2}$ componentes.
- PGA com planos/pontos: 4 componentes cada.

3.2 Representação Matricial

Para aplicações numéricas, pode-se usar a representação matricial fiel:

- $\mathcal{Cl}(3,0) \rightarrow$ matrizes de Pauli 2×2 complexas.
- $\mathcal{Cl}(1,3) \rightarrow$ matrizes de Dirac 4×4 reais.

Isto é computacionalmente eficiente mas perde a interpretação geométrica.

Parte XIV

Tópicos Avançados e Conexões

1 Cálculo de Clifford e Análise Hipercomplexa

1.1 Funções Monogênicas

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Cl}(n, 0)$ é **monogênica** se:

$$\nabla f = 0 \tag{203}$$

Isto generaliza funções holomorfas ($\bar{\partial}f = 0$ em $\mathbb{C}$) para dimensões superiores. Funções monogênicas satisfazem:

- Fórmula integral de Cauchy generalizada.
- Expansão em série de Taylor-Clifford.
- Princípio do máximo.

1.2 Transformada de Fourier de Clifford

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-I\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d^n x \tag{204}$$

onde I é o pseudoescalar. Generaliza a transformada de Fourier com propriedades direcionais adicionais.

2 GA e Informação Quântica

2.1 Qubits como Rotores

Um qubit puro é um rotor em $\mathcal{Cl}(3, 0)$:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad \leftrightarrow \quad \psi = a + b I\sigma_1 + c I\sigma_2 + d I\sigma_3 \quad (205)$$

A esfera de Bloch é o espaço de rotores unitários agindo sobre σ_3 :

$$\hat{n} = \psi \sigma_3 \tilde{\psi} = n_x \sigma_1 + n_y \sigma_2 + n_z \sigma_3 \quad (206)$$

2.2 Portas Quânticas como Rotores

- **Hadamard:** $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_3) =$ reflexão no plano $\hat{n} = (\sigma_1 + \sigma_3)/\sqrt{2}$.
- **Pauli-X:** $X = \sigma_1 =$ reflexão em e_1 .
- **Fase-S:** $S = e^{-I\sigma_3\pi/4} =$ rotor de $\pi/2$ no plano xy .
- **T-gate:** $T = e^{-I\sigma_3\pi/8} =$ rotor de $\pi/4$.

2.3 Emaranhamento

Para dois qubits, usamos $\mathcal{Cl}(3, 0) \otimes \mathcal{Cl}(3, 0)$ ou $\mathcal{Cl}(6, 0)$. O estado de Bell:

$$|\Phi^+\rangle \leftrightarrow \psi_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + I_1 I_2 \sigma_{3,1} \sigma_{3,2}) \quad (207)$$

A concorrência e medidas de emaranhamento têm expressões geométricas naturais.

3 GA em Cristalografia e Simetrias Discretas

3.1 Grupos Pontuais via Rotores

Todos os 32 grupos pontuais cristalográficos são subgrupos de $\text{Pin}(3)$, gerados por reflexões:

$$\text{Pin}(3) = \{R = n_1 n_2 \cdots n_k : |n_i| = 1\} \quad (208)$$

Os grupos de simetria são:

- Rotações puras (k par): subgrupos de $\text{Spin}(3)$.
- Com reflexões (k ímpar): grupos completos de $\text{Pin}(3)$.

3.2 Quasicristais

A simetria icosaédrica dos quasicristais é descrita por rotores em $\mathcal{Cl}(3, 0)$ que não formam grupo cristalográfico em 3D, mas podem ser projetados de redes regulares em 6D via $\mathcal{Cl}(6, 0)$.

4 Relação com Formas de Cartan

4.1 Álgebra Exterior $\leftrightarrow$ GA

Formas Diferenciais	Álgebra Geométrica
p -forma ω	p -vetor F
$d\omega$ (derivada exterior)	$\nabla \wedge F$
$\delta\omega$ (co-derivada)	$\nabla \cdot F$
$*\omega$ (Hodge dual)	FI^{-1}
$(d + \delta)\omega$	∇F
$\Delta\omega$ (Laplaciano de Hodge)	$\nabla^2 F$

Tabela 6: Correspondência entre formas diferenciais e álgebra geométrica.

A vantagem da GA é que ∇ é inversível (quando $\nabla^2 \neq 0$), permitindo "dividir" pela derivada — funções de Green como inversas do operador de Dirac.

5 GA e Machine Learning Geométrico

5.1 Redes Neurais Equivariantes

Redes neurais que operam sobre dados geométricos (nuvens de pontos, malhas, campos vetoriais) beneficiam-se de camadas equivariantes sob o grupo euclidiano. A GA fornece:

- Representações naturais de dados geométricos (pontos, direções, planos via PGA/CGA).
- Camadas lineares equivariantes via produto geométrico.
- Normalização invariante usando a norma de Clifford.

5.2 Clifford Group Equivariant Neural Networks

Arquiteturas recentes usam camadas da forma:

$$f(x) = \sum_k W_k x V_k + b \quad (209)$$

onde W_k, V_k são multivetores aprendíveis e x é o input multivetor. A equivariância é garantida pela estrutura algébrica.