

Grupo Conforme $SO(2,4)$ e Aplicações na Física Teórica

Simetria Conforme, Representações, Unpartículas
e a Correspondência AdS/CFT

Carlos R. de Moraes Filho

15 de junho de 2026

Conteúdo

Convenções de Notação e Índices	12
I Fundamentos da Simetria Conforme	13
1 Transformações Conformes no Espaço-Tempo	13
1.1 Definição	13
1.2 Classificação das Transformações Conformes em d Dimensões	13
1.3 Transformações Conformes Especiais (SCT)	14
1.4 Condição de Killing Conforme	14
2 O Grupo $SO(2,4)$	15
2.1 Motivação: Linearização	15
2.2 Embedding de Dirac	15
2.3 Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2,4)$	16
2.4 Diagrama dos Geradores	16
3 Álgebra Conforme: Relações de Comutação Completas	17
3.1 Interpretação Física dos Comutadores	17
4 Simetria de Weyl	18
4.1 Transformações de Weyl	18
4.2 Tensor de Weyl	18
4.3 Anomalia de Weyl (Anomalia Conforme)	19
II Geometria Diferencial Conforme	19
1 Conexões em Geometria Conforme	19
1.1 Conexão de Levi-Civita	19
1.2 Transformação sob Reescalamento de Weyl	20

1.3	Conexão de Weyl	20
1.4	Derivada Covariante Conforme	21
2	O Tensor de Schouten	21
2.1	Definição	21
2.2	Motivação: Por que o Schouten?	21
2.3	Transformação Conforme do Tensor de Schouten	22
3	Decomposição Irredutível da Curvatura	22
3.1	Decomposição via Tensor de Schouten	22
3.2	Identities de Bianchi Conformes	23
4	Tensor de Weyl — Tratamento Completo	23
4.1	Definição e Propriedades Algébricas	23
4.2	Invariância Conforme do Tensor de Weyl	24
4.3	Decomposição Self-Dual e Anti-Self-Dual em $d = 4$	25
4.4	Classificação de Petrov	25
5	O Tensor de Cotton	26
5.1	Definição	26
5.2	Propriedades	26
5.3	O Cotton como Invariante Conforme em $d = 3$	26
5.4	Cotton-York Tensor (Forma Tensorial Simétrica)	27
6	Formas de Cartan do Grupo Conforme	27
6.1	Forma de Maurer-Cartan	27
6.2	Conexão de Cartan Conforme	28
6.3	Curvatura de Cartan	28
6.4	Equações de Estrutura Explícitas — Demonstração	29
6.5	Condições de Curvatura Nula e Geometria de Riemann	29
6.6	Forma de Cartan Normal	30

7	Operadores Conformemente Covariantes	30
7.1	Operador de Yamabe (Laplaciano Conforme)	30
7.2	Operador de Paneitz (4ª Ordem)	31
7.3	Hierarquia GJMS	32
III	Forma Matricial dos Geradores Conformes	32
1	Representação Matricial 6D de $SO(2,4)$	32
1.1	Geradores na Representação Fundamental (6×6)	32
1.2	Verificação das Relações de Comutação	34
2	Representação Spinorial 4×4 — Matrizes de Dirac	34
2.1	Isomorfismo $\mathfrak{so}(2,4) \cong \mathfrak{su}(2,2)$	34
2.2	Forma Explícita (Representação de Weyl)	34
2.3	Interpretação: P_μ e K_μ como Operadores de Escada	35
3	Operadores de Criação e Aniquilação Conformes	36
3.1	Estrutura de Álgebra de Escada	36
3.2	Quantização Radial e o Mapa Estado-Operador	36
3.3	Álgebra $\mathfrak{su}(2,2)$ em Termos de Osciladores	37
IV	$SU(2,2)$, Twistors e Férmions Conformes	37
1	O Grupo $SU(2,2)$	37
1.1	Definição e Estrutura	37
1.2	Isomorfismo com $SO(2,4)$	38
1.3	Decomposição em Blocos	38
2	Twistors	39
2.1	Definição de Twistor	39
2.2	Espaço de Twistors $\mathbb{PT}$	39
2.3	Correspondência Ponto $\leftrightarrow$ Reta	39

2.4	Norma de Twistor e Helicidade	40
2.5	Funções de Onda em Espaço de Twistors	40
3	Férmions Conformes	40
3.1	Equação de Dirac Conforme	40
3.2	Propagador Conforme para Férmions	41
3.3	Supertwistors	41
V	Representações do Grupo Conforme	42
1	Operadores Primários e Descendentes	42
1.1	Definição de Operador Primário	42
1.2	Operadores Descendentes	42
1.3	Limites de Unitariedade	43
2	Casimir do Grupo Conforme	43
2.1	Casimir Quadrático	43
2.2	Casimir Quártico	44
3	Correladores e a OPE	44
3.1	Funções de 2 Pontos	44
3.2	Funções de 3 Pontos	44
3.3	Funções de 4 Pontos e Razões Cruzadas	44
3.4	Operator Product Expansion (OPE)	45
3.5	Blocos Conformes	45
VI	Campos Conformes e Representações Diferenciais	46
1	Transformação Finita de Campos	46
1.1	Lei de Transformação de Campo Primário	46
1.2	Transformação de Campos com Spin	46
1.3	Spinor Conforme	47

2	Representações Diferenciais dos Geradores	47
2.1	Ação sobre Campos Escalares	47
2.2	Ação sobre Campos Vetoriais	47
2.3	Ação sobre Campos Spinoriais	48
2.4	Fórmula Geral Compacta	48
3	Tensores Simétricos Traceless	48
3.1	Representação Diferencial para Tensor Simétrico de Spin l	48
3.2	Formalismo de Índice-Free (Encoding Polynomial)	49
4	Tensores Antissimétricos (p-formas)	49
4.1	Representação de uma p -Forma Conforme	49
4.2	Formas Diferenciais e Invariância Conforme	50
5	Representações Mistas (Diagramas de Young)	50
5.1	Tensores de Simetria Mista	50
5.2	Representação Diferencial para Hook Tensor	51
5.3	Embedding Formalism (Todorov)	51
6	Correntes Conservadas de Spin Superior	51
7	Dimensão de Escalonamento e Correntes	52
7.1	Dimensão Canônica vs. Anômala	52
7.2	Correntes Conservadas e Proteção	52
8	Ward Identities Conformes	52
8.1	Ward Identity para Dilatação	52
8.2	Ward Identity para SCT	52
VII	Quebra de Simetria Conforme	53
1	Mecanismos de Quebra	53
1.1	Quebra Explícita	53

1.2	Quebra Espontânea (Dilaton)	53
1.3	Dilaton Efetivo e Física do Higgs	54
2	Anomalia Conforme e Quebra Quântica	54
2.1	Anomalia de Traço	54
2.2	Exemplo: QCD e Transmutação Dimensional	55
3	CFTs com Simetria Conforme Exata	55
3.1	Exemplos em 4D	55
3.2	Condições para Ponto Fixo	55
VIII	Unpartículas (Unparticle Physics)	56
1	Motivação e Conceito	56
1.1	A Ideia de Georgi (2007)	56
1.2	Interpretação Física	56
2	Espectro de Massa e Decomposição Espectral	57
2.1	Representação de Källén-Lehmann	57
2.2	Propagador Escalar	57
2.3	Propagadores Vetorial e Tensorial	58
3	Operadores de Criação e Aniquilação	58
3.1	Quantização do Setor Conforme	58
3.2	Operador de Campo da Unpartícula	58
3.3	Espaço de Fock	59
4	Acoplamento ao Modelo Padrão	59
4.1	Estrutura de Energia e RG Flow	59
5	Regras de Feynman e Fenomenologia	60
5.1	Vértices e Propagador	60
5.2	Tipos de Acoplamento	60

5.3	Seção de Choque $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ com Unpartícula	60
5.4	Assinaturas Experimentais	60
6	Gap Conforme e Quebra de Simetria	61
IX	Relatividade Geral, Formalismo de Cartan e Simetria Conforme	61
1	Gravitação de Cartan (Formalismo de Primeira Ordem)	61
1.1	Variáveis de Cartan	61
1.2	Equações de Estrutura de Cartan	62
1.3	Ação de Palatini	62
2	Gravitação Conforme de Weyl	63
2.1	Gauge Conforme: Grupo $SO(2,4)$ Local	63
2.2	Gravitação de Weyl Quadrática	63
2.3	Tensor de Bach	63
2.4	Gauss-Bonnet e Topologia	64
3	Conexão de Cartan Conforme Aplicada à Gravitação	64
3.1	Fibrado de Tractor Conforme	64
3.2	Derivada de Tractor (Conexão de Tractor)	64
3.3	Curvatura do Tractor	65
3.4	Equações de Estrutura com Todas as Curvaturas	65
3.5	Identidades de Bianchi na Formulação de Gauge	66
3.6	Recuperando a Conexão de Levi-Civita	66
4	Supergravidade Conforme	66
4.1	Construção de Kaku-Townsend-van Nieuwenhuizen	66
X	Buracos Negros e Simetria Conforme	67

1	Buracos Negros em AdS e Termodinâmica	67
1.1	Buraco Negro de Schwarzschild-AdS	67
1.2	Entropia de Bekenstein-Hawking	68
2	Simetria Conforme em Horizontes	68
2.1	Dualidade Kerr/CFT	68
2.2	Simetria BMS	68
3	Informação e Unitariedade	69
3.1	Paradoxo da Informação	69
3.2	Firewalls e ER=EPR	69
XI	Correspondência AdS/CFT	69
1	A Dualidade Gauge/Gravidade	69
1.1	Formulação de Maldacena (1997)	69
1.2	O Espaço Anti-de Sitter	70
1.3	Dicionário AdS/CFT	70
1.4	Relação Massa-Dimensão	71
2	Fórmula GKPW	71
3	Holografia e o Grupo Conforme	71
3.1	Isometrias do AdS = Simetria Conforme	71
3.2	Entropia de Emaranhamento (Ryu-Takayanagi)	72
XII	Bootstrap Conforme	73
1	A Filosofia do Bootstrap	73
1.1	Dados da CFT	73
1.2	Crossing Symmetry	73
2	Bootstrap Numérico	74

2.1	Método de Exclusão (SDP)	74
2.2	Modelo de Ising 3D	74
3	Superconforme Bootstrap	74
XIII	$\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills e a CFT Canônica	75
1	A Teoria	75
1.1	Conteúdo de Campo	75
1.2	Propriedades Especiais	75
1.3	Mapa de Parâmetros	76
2	Operadores BPS e Integrabilidade	76
XIV	Teorias Conformes em Diversas Dimensões	77
1	CFT em $d = 2$ (Álgebra de Virasoro)	77
2	CFT em $d = 3$	77
3	CFT em $d = 6$	78
4	CFT em $d = 5$	78
XV	Defects, Boundaries e Extended Operators	78
1	CFT com Defeitos	78
1.1	OPE Bulk-to-Defect	79
2	Boundary CFT (BCFT)	79
XVI	Aplicações em Física da Matéria Condensada	80
1	Transições de Fase e Pontos Críticos	80

1.1	Universalidade e CFT	80
1.2	Expoentes Críticos como Dimensões Conformes	80
2	Pontos Críticos Quânticos	81
3	Aplicação via AdS/CFT	81
3.1	Viscosidade/Entropia (Bound KSS)	81
3.2	Condutividade Óptica	81
XVII	Fronteiras Modernas e Desenvolvimentos Recentes	82
1	Amplitudes de Espalhamento e Simetria Conforme	82
1.1	Dual Conformal Symmetry	82
1.2	Amplituhedron	82
2	Entropia de Emaranhamento e Informação Quântica	83
2.1	Fórmula de Cardy para Entropia	83
2.2	Complexidade Holográfica	83
3	Ilhas de Entropia e o Paradoxo da Informação	83
3.1	Fórmula da Ilha	83
4	Simetrias Generalizadas	84
4.1	Simetrias de Forma Superior (p -form)	84
4.2	Non-Invertible Symmetries	84
5	Machine Learning e CFT	84
5.1	Neural Network Bootstrap	84
5.2	Diffusion Models para Dados da CFT	85
6	Perspectivas	85
XVIII	Relação com Álgebra Geométrica e CGA	86

1	Grupo Conforme na Álgebra Geométrica	86
1.1	Grupo Conforme como $\text{Pin}(2,4)$ / $\text{Spin}(2,4)$	86
1.2	Mapeamento dos Geradores	86
1.3	Transformações Conformes como Rotores Explícitos	87
1.4	Composição Unificada	87
2	Álgebra Conforme em Termos de Produtos Geométricos	88
2.1	Comutadores como Produtos Geométricos	88
3	Spinors Conformes na GA	88
3.1	Spinor de Dirac em 6D como Twistor	88
3.2	Equação de Dirac Conforme na GA	89
3.3	Modelo de Partícula Conforme	89
4	Geometria Conforme e Gravitação na CGA	89
4.1	Conexão de Weyl na CGA	89
4.2	Tractor Calculus e GA	90

Convenções de Notação e Índices

Símbolo	Intervalo	Descrição
$\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$	$0, 1, \dots, d-1$	Índices curvos (espaço-tempo, coordenadas)
$a, b, c, d, \dots$	$0, 1, \dots, d-1$	Índices planos (frame local / tangente)
$A, B, C, D, \dots$	$0, 1, \dots, 5$	Índices do espaço embedding $\mathbb{R}^{2,4}$
α, β, γ	$1, 2$	Índices spinoriais left-handed (não-dotados)
$\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$	$\dot{1}, \dot{2}$	Índices spinoriais right-handed (dotados)
i, j, k	$1, 2, 3$	Índices espaciais (quando não-ambíguo)
I, J, K	$1, \dots, \mathcal{N}$	Índices de R-simetria

Assinaturas de métrica:

- Espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d-1}$: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$
- Espaço embedding $\mathbb{R}^{2,4}$: $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1, +1)$

Outras convenções:

- Antissimetrização com peso unitário: $T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$
- Simetrização com peso unitário: $T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$
- Derivada covariante: $\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho$
- Tensor de Riemann: $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$
- Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$ (contração no 1º e 3º índices)

Parte I

Fundamentos da Simetria Conforme

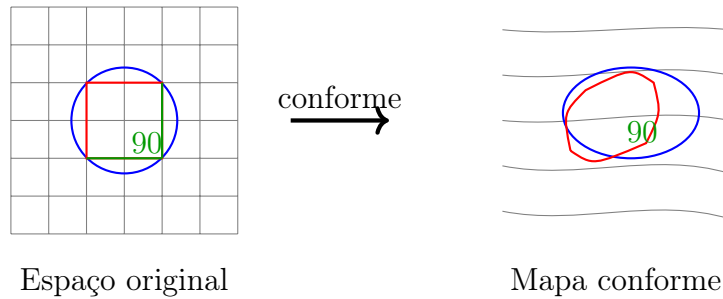
1 Transformações Conformes no Espaço-Tempo

1.1 Definição

Uma **transformação conforme** é um difeomorfismo $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ que preserva ângulos, mas não necessariamente distâncias. Formalmente, a métrica transforma-se por um fator de escala local:

$$\boxed{g'_{\mu\nu}(x') = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)} \quad (1)$$

onde $\Omega(x) > 0$ é uma função suave. Isto é mais geral que isometrias ($\Omega = 1$) mas mais restritivo que difeomorfismos gerais.



1.2 Classificação das Transformações Conformes em d Dimensões

Para $d \geq 3$, o grupo conforme é **finito-dimensional**. As transformações conformes do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d-1}$ são:

Transformação	Forma	Geradores	Parâmetros
Translações	$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$	P_μ	d
Rotações de Lorentz	$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$	$M_{\mu\nu}$	$\frac{d(d-1)}{2}$
Dilatações	$x'^\mu = \lambda x^\mu$	D	1
Transformações conformes especiais	$x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2}$	K_μ	d

Tabela 1: Transformações conformes e seus geradores.

O número total de geradores é:

$$d + \frac{d(d-1)}{2} + 1 + d = \frac{(d+1)(d+2)}{2} \quad (2)$$

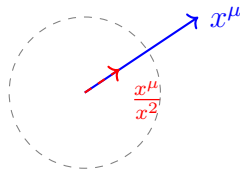
Para $d = 4$: $\frac{5 \times 6}{2} = 15$ geradores — a dimensão de $\mathfrak{so}(2, 4)$.

1.3 Transformações Conformes Especiais (SCT)

A SCT é a transformação menos intuitiva. Pode ser entendida como a composição:

$$\boxed{\text{SCT} = \text{Inversão} \circ \text{Translação} \circ \text{Inversão}} \quad (3)$$

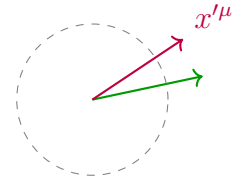
onde a inversão é $x^\mu \rightarrow x^\mu/x^2$.



1. Inversão



2. Translação



3. Inversão

Explicitamente:

$$x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2}, \quad \Omega(x) = (1 + 2b \cdot x + b^2 x^2) \quad (4)$$

Efeito: Uma SCT mapeia o infinito para um ponto finito e vice-versa. Ela "puxa" o infinito para dentro do espaço.

1.4 Condição de Killing Conforme

A condição infinitesimal para uma transformação conforme é a **equação de Killing conforme**:

$$\boxed{\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d} (\partial \cdot \xi) \eta_{\mu\nu}} \quad (5)$$

onde $\xi^\mu(x)$ é o campo vetorial gerador. As soluções são:

- $\xi^\mu = a^\mu$ (translações)
- $\xi^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$ com $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ (Lorentz)
- $\xi^\mu = \lambda x^\mu$ (dilatação)
- $\xi^\mu = 2(b \cdot x)x^\mu - b^\mu x^2$ (SCT)

2 O Grupo $SO(2,4)$

2.1 Motivação: Linearização

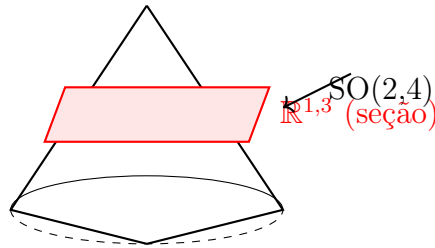
As transformações conformes do espaço de Minkowski 4D são **não-lineares** (especialmente a SCT). Mas podemos linearizá-las embutindo o espaço-tempo 4D em um espaço auxiliar 6D com assinatura $(2,4)$.

Definimos coordenadas X^A com $A = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e métrica:

$$\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1, +1) \quad (6)$$

O grupo $SO(2,4)$ atua **linearmente** neste espaço 6D, e sua ação projetada no cone de luz $X^A X_A = 0$ reproduz exatamente as transformações conformes não-lineares em 4D!

Cone nulo $X^2 = 0$ em $\mathbb{R}^{2,4}$



Transformações conformes = $SO(2,4)$ no cone

2.2 Embedding de Dirac

A relação entre coordenadas de Minkowski x^μ e coordenadas 6D X^A no cone nulo:

$$X^A = \frac{1}{x^+} \begin{pmatrix} x^\mu \\ \frac{1-x^2}{2} \\ \frac{1+x^2}{2} \end{pmatrix}, \quad X^A X_A = 0 \quad (7)$$

onde identificamos $X^4 = \frac{1-x^2}{2x^+}$ e $X^5 = \frac{1+x^2}{2x^+}$, com x^+ um fator de escala (coordenada projetiva).

Inversamente: $x^\mu = X^\mu / (X^4 + X^5)$.

2.3 Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2, 4)$

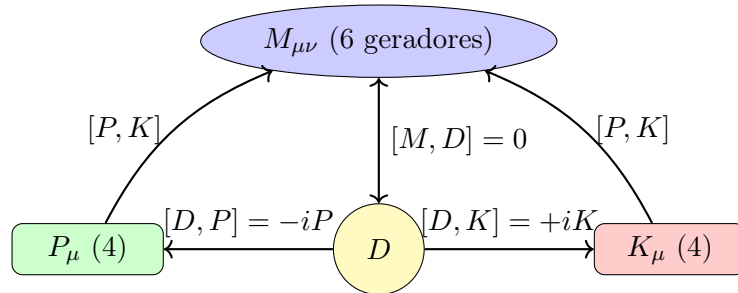
Os geradores $J_{AB} = -J_{BA}$ satisfazem:

$$[J_{AB}, J_{CD}] = i(\eta_{AC}J_{BD} - \eta_{AD}J_{BC} - \eta_{BC}J_{AD} + \eta_{BD}J_{AC}) \quad (8)$$

A identificação com os geradores conformes em 4D:

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= J_{\mu\nu} & (\text{Lorentz}) \\ P_\mu &= J_{\mu 4} + J_{\mu 5} & (\text{Translações}) \\ K_\mu &= J_{\mu 4} - J_{\mu 5} & (\text{SCT}) \\ D &= J_{45} & (\text{Dilatação}) \end{aligned} \quad (9)$$

2.4 Diagrama dos Geradores



$$[P_\mu, K_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu})$$

Total: $6 + 4 + 4 + 1 = 15$ geradores

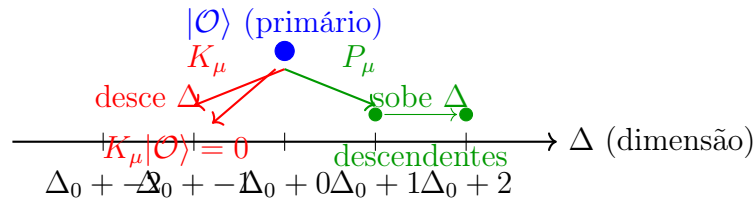
3 Álgebra Conforme: Relações de Comutação Completas

$$\begin{aligned}
 [D, P_\mu] &= -iP_\mu \\
 [D, K_\mu] &= +iK_\mu \\
 [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) \\
 [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu) \\
 [M_{\mu\nu}, K_\rho] &= i(\eta_{\nu\rho}K_\mu - \eta_{\mu\rho}K_\nu) \\
 [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + 3 \text{ termos}) \\
 [D, M_{\mu\nu}] &= 0 \\
 [P_\mu, P_\nu] &= 0, \quad [K_\mu, K_\nu] = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

3.1 Interpretação Física dos Comutadores

- $[D, P_\mu] = -iP_\mu$: Translações têm dimensão de massa $+1$ (peso -1 sob D). P_μ **aumenta** a energia.
- $[D, K_\mu] = +iK_\mu$: SCTs têm dimensão de massa -1 (peso $+1$ sob D). K_μ **diminui** a energia.
- $[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu})$: A "diferença" entre translação e SCT gera dilatações e rotações.

Escada de Dimensões



4 Simetria de Weyl

4.1 Transformações de Weyl

Uma **transformação de Weyl** (ou reescalonamento de Weyl) é uma transformação *local* da métrica:

$$\boxed{g_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}(x)} \quad (11)$$

onde $\sigma(x)$ é uma função arbitrária. Isto **não** é um difeomorfismo — é uma mudança do fator de escala em cada ponto.

Distinção importante:

- **Invariância conforme:** Simetria sob difeomorfismos que reescalam a métrica. Grupo finito-dimensional $SO(2,4)$.
- **Invariância de Weyl:** Simetria sob reescalonamento local $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}$ sem mover pontos. Grupo infinito-dimensional.

Em $d = 2$, as duas noções coincidem (o grupo conforme é infinito-dimensional = grupo de Weyl). Em $d > 2$, invariância de Weyl é mais forte.

4.2 Tensor de Weyl

O **tensor de Weyl** $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ é a parte do tensor de Riemann invariante sob transformações de Weyl:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{2}{d-2} (g_{\mu[\rho} R_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho} R_{\sigma]\mu}) + \frac{2}{(d-1)(d-2)} R g_{\mu[\rho} g_{\sigma]\nu} \quad (12)$$

Propriedades:

- $C^\mu_{\nu\mu\sigma} = 0$ (traço nulo — demonstração na Parte II, Seção 4).
- Invariante sob $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}$ (prova completa na Parte II).
- Mede a curvatura "conformalmente irreduzível" (deformação de maré sem expansão/contração).
- $C = 0 \Leftrightarrow$ espaço-tempo conformalmente plano.

- Relaciona-se ao tensor de Schouten via: $R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} + (g \wedge P)_{\mu\nu\rho\sigma}$ (Parte II, Seção 3).

4.3 Anomalia de Weyl (Anomalia Conforme)

Em teoria quântica, a simetria de Weyl pode ser quebrada por efeitos quânticos. O traço do tensor energia-momento, classicamente zero para teorias conformes, adquire valor não-nulo:

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = c C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} - a E_4 + \text{termos de derivada total} \quad (13)$$

onde $E_4 = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2$ é o integrando de Euler em 4D, e c , a são as **cargas centrais** (números que caracterizam a CFT).

O coeficiente a satisfaz o **a -theorem** (Komargodski-Schwimmer 2011):

$$a_{\text{UV}} > a_{\text{IR}} \quad (14)$$

O fluxo do grupo de renormalização é irreversível — generalização 4D do c -theorem de Zamolodchikov.

Parte II

Geometria Diferencial Conforme

1 Conexões em Geometria Conforme

1.1 Conexão de Levi-Civita

A **conexão de Levi-Civita** é a única conexão afim que é simultaneamente métrica-compatível e livre de torção:

$$\boxed{\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0 \quad (\text{métrica-compatível}), \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho \quad (\text{livre de torção})} \quad (15)$$

Os símbolos de Christoffel são determinados unicamente pela métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (16)$$

1.2 Transformação sob Reescalamento de Weyl

Sob uma transformação de Weyl $\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$, definimos $\Upsilon_\mu \equiv \partial_\mu \sigma$. Os símbolos de Christoffel transformam-se como:

$$\boxed{\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \delta_\mu^\rho \Upsilon_\nu + \delta_\nu^\rho \Upsilon_\mu - g_{\mu\nu} \Upsilon^\rho} \quad (17)$$

Demonstração: Aplicando a fórmula de Christoffel a $\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\rho\sigma} (\partial_\mu \hat{g}_{\nu\sigma} + \partial_\nu \hat{g}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \hat{g}_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\sigma} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu (e^{2\sigma} g_{\nu\sigma}) + \partial_\nu (e^{2\sigma} g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma (e^{2\sigma} g_{\mu\nu})) \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [2\Upsilon_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} + 2\Upsilon_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - 2\Upsilon_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}] \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \delta_\mu^\rho \Upsilon_\nu + \delta_\nu^\rho \Upsilon_\mu - g_{\mu\nu} \Upsilon^\rho \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (18)$$

1.3 Conexão de Weyl

Uma **conexão de Weyl** generaliza a conexão de Levi-Civita ao relaxar a condição de compatibilidade métrica para:

$$\hat{\nabla}_\mu g_{\nu\rho} = -2b_\mu g_{\nu\rho} \quad (19)$$

onde b_μ é a **1-forma de Weyl** (potencial de gauge da dilatação). A conexão resultante é:

$$\boxed{\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \delta_\mu^\rho b_\nu + \delta_\nu^\rho b_\mu - g_{\mu\nu} b^\rho} \quad (20)$$

Propriedade fundamental: A conexão de Weyl é **invariante de gauge conforme**. Sob $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$ com $b_\mu \rightarrow b_\mu + \partial_\mu \sigma$, temos $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \rightarrow \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$ (invariante).

Demonstração: A mudança em Γ sob Weyl é $+\delta_\mu^\rho \Upsilon_\nu + \delta_\nu^\rho \Upsilon_\mu - g_{\mu\nu} \Upsilon^\rho$, e a mudança em b contribui $+\delta_\mu^\rho \Upsilon_\nu + \delta_\nu^\rho \Upsilon_\mu - g_{\mu\nu} \Upsilon^\rho$. Somando as contribuições originais de b antes da transformação: as variações se cancelam exatamente. $\blacksquare$

1.4 Derivada Covariante Conforme

Para um tensor de peso conforme w (i.e., $T \rightarrow e^{w\sigma}T$ sob Weyl), a **derivada covariante conforme** é:

$$\boxed{D_\mu T^{\nu_1 \dots}_{\rho_1 \dots} = \nabla_\mu T^{\nu_1 \dots}_{\rho_1 \dots} + w b_\mu T^{\nu_1 \dots}_{\rho_1 \dots} + (\text{termos de conexão de Weyl para cada índice})} \quad (21)$$

Explicitamente para um vetor V^μ de peso w :

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \hat{\Gamma}^\nu_{\mu\rho} V^\rho + w b_\mu V^\nu \quad (22)$$

2 O Tensor de Schouten

2.1 Definição

O **tensor de Schouten** $P_{\mu\nu}$ é definido como a "parte de traço" normalizada do tensor de Ricci:

$$\boxed{P_{\mu\nu} = \frac{1}{d-2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2(d-1)} g_{\mu\nu} \right)} \quad (23)$$

Propriedades imediatas:

- Simétrico: $P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu}$ (herdado de $R_{\mu\nu}$).
- Traço: $g^{\mu\nu} P_{\mu\nu} = P^\mu_\mu = \frac{R}{2(d-1)}$.
- Em $d = 4$: $P_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{6} g_{\mu\nu} \right)$.

2.2 Motivação: Por que o Schouten?

O tensor de Schouten aparece naturalmente na decomposição do tensor de Riemann em partes irreduzíveis sob o grupo de Lorentz. O tensor de Riemann em d dimensões possui $\frac{d^2(d^2-1)}{12}$ componentes independentes, que se decompõem em:

$$\underbrace{\frac{d^2(d^2-1)}{12}}_{\text{Riemann}} = \underbrace{\frac{d(d+1)(d+2)(d-3)}{12}}_{\text{Weyl}} + \underbrace{\frac{d(d+1)}{2}}_{\text{Ricci traceless}} - 1 + \underbrace{1}_{\text{escalar}} \quad (24)$$

O Schouten encapsula compactamente as duas últimas contribuições (Ricci + escalar).

2.3 Transformação Conforme do Tensor de Schouten

Sob $\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$ com $\Upsilon_\mu = \partial_\mu \sigma$:

$$\boxed{\hat{P}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} - \nabla_\mu \Upsilon_\nu + \Upsilon_\mu \Upsilon_\nu - \frac{1}{2} \Upsilon^\rho \Upsilon_\rho g_{\mu\nu}} \quad (25)$$

Demonstração detalhada:

Passo 1: Transformação do tensor de Ricci. Usando $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + C_{\mu\nu}^\rho$ com $C_{\mu\nu}^\rho = \delta_\mu^\rho \Upsilon_\nu + \delta_\nu^\rho \Upsilon_\mu - g_{\mu\nu} \Upsilon^\rho$:

$$\hat{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho + \nabla_\mu C_{\nu\sigma}^\rho - \nabla_\nu C_{\mu\sigma}^\rho + C_{\mu\lambda}^\rho C_{\nu\sigma}^\lambda - C_{\nu\lambda}^\rho C_{\mu\sigma}^\lambda \quad (26)$$

Passo 2: Contraindo ρ com μ :

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\sigma\nu} &= R_{\sigma\nu} - (d-2) \nabla_\nu \Upsilon_\sigma - g_{\sigma\nu} \nabla^\rho \Upsilon_\rho \\ &\quad + (d-2) \Upsilon_\sigma \Upsilon_\nu - (d-2) \Upsilon^\rho \Upsilon_\rho g_{\sigma\nu} + g_{\sigma\nu} \Upsilon^\rho \Upsilon_\rho \end{aligned} \quad (27)$$

Passo 3: Calculando o escalar:

$$\hat{R} = e^{-2\sigma} [R - 2(d-1) \nabla^\mu \Upsilon_\mu - (d-1)(d-2) \Upsilon^\mu \Upsilon_\mu] \quad (28)$$

Passo 4: Substituindo na definição do Schouten:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\mu\nu} &= \frac{1}{d-2} \left(\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{\hat{R}}{2(d-1)} \hat{g}_{\mu\nu} \right) \\ &= P_{\mu\nu} - \nabla_\mu \Upsilon_\nu + \Upsilon_\mu \Upsilon_\nu - \frac{1}{2} |\Upsilon|^2 g_{\mu\nu} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (29)$$

Observação importante: A transformação do Schouten é *não-homogênea* (contém derivadas de σ). Isso contrasta com o tensor de Weyl, que transforma homogeneamente.

3 Decomposição Irredutível da Curvatura

3.1 Decomposição via Tensor de Schouten

O tensor de Riemann decompõe-se de forma elegante usando o Schouten:

$$\boxed{R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} + 2(g_{\mu[\rho}P_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho}P_{\sigma]\mu})} \quad (30)$$

ou equivalentemente, usando o **produto de Kulkarni-Nomizu** $\mathbb{K}$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} + (g \mathbb{K} P)_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (31)$$

onde $(g \mathbb{K} P)_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}P_{\sigma\nu} + g_{\nu\sigma}P_{\rho\mu} - g_{\mu\sigma}P_{\rho\nu} - g_{\nu\rho}P_{\sigma\mu}$.

Demonstração: Verificação direta por contração.

Contraindo $g^{\mu\rho}$ na decomposição:

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma} &= C_{\nu\mu\sigma}^{\mu} + g^{\mu\rho}(g_{\mu\rho}P_{\sigma\nu} + g_{\nu\sigma}P_{\rho\mu} - g_{\mu\sigma}P_{\rho\nu} - g_{\nu\rho}P_{\sigma\mu}) \\ &= 0 + d P_{\sigma\nu} + g_{\nu\sigma}P_{\mu}^{\mu} - P_{\sigma\nu} - P_{\sigma\nu} \\ &= (d-2)P_{\sigma\nu} + \frac{R}{2(d-1)}g_{\nu\sigma} \end{aligned} \quad (32)$$

Isto é identicamente satisfeito pela definição de $P_{\mu\nu}$. ■

3.2 Identidades de Bianchi Conformes

A segunda identidade de Bianchi $\nabla_{[\lambda}R_{\mu\nu]\rho\sigma} = 0$ implica, quando decomposta:

$$\boxed{\nabla^{\mu}C_{\mu\nu\rho\sigma} = (d-3)(\nabla_{\rho}P_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}P_{\nu\rho}) = (d-3)\mathcal{C}_{\nu\rho\sigma}} \quad (33)$$

onde $\mathcal{C}_{\nu\rho\sigma} = \nabla_{\rho}P_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}P_{\nu\rho}$ é o **tensor de Cotton** (Seção 5).

Consequências:

- Em $d = 3$: $C_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv 0$ identicamente (Weyl é nulo), e o Cotton é o invariante conforme relevante.
- Em $d = 4$: $\nabla^{\mu}C_{\mu\nu\rho\sigma} = \mathcal{C}_{\nu\rho\sigma}$ (divergência do Weyl = Cotton).
- Em $d \geq 4$: O Weyl é divergência-livre se e somente se o Cotton é nulo.

4 Tensor de Weyl — Tratamento Completo

4.1 Definição e Propriedades Algébricas

O **tensor de Weyl** $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ é a parte totalmente trace-free do tensor de Riemann:

$$\boxed{C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{2}{d-2} (g_{\mu[\rho} R_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho} R_{\sigma]\mu}) + \frac{2R}{(d-1)(d-2)} g_{\mu[\rho} g_{\sigma]\nu}} \quad (34)$$

Simetrias algébricas (as mesmas do Riemann):

1. Antissimetria: $C_{\mu\nu\rho\sigma} = -C_{\nu\mu\rho\sigma} = -C_{\mu\nu\sigma\rho}$
2. Simetria par: $C_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\rho\sigma\mu\nu}$
3. Primeira identidade de Bianchi: $C_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0$
4. **Traço nulo** (propriedade adicional): $g^{\mu\rho} C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

Demonstração do traço nulo:

$$\begin{aligned} g^{\mu\rho} C_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\nu\sigma} - \frac{1}{d-2} (d R_{\nu\sigma} - R_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} R + g_{\nu\sigma} R) + \frac{R}{(d-1)(d-2)} (d-1) g_{\nu\sigma} \\ &= R_{\nu\sigma} - R_{\nu\sigma} + \frac{R}{d-2} g_{\nu\sigma} - \frac{R}{d-2} g_{\nu\sigma} = 0 \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (35)$$

4.2 Invariância Conforme do Tensor de Weyl

Teorema: Sob $\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$, o tensor de Weyl com índices mistos é invariante:

$$\boxed{\hat{C}^\rho_{\mu\sigma\nu} = C^\rho_{\mu\sigma\nu}} \quad (36)$$

(O tensor com todos os índices baixos transforma como $\hat{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = e^{2\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma}$.)

Demonstração: Usando a decomposição $R = C + g \oslash P$:

$$\hat{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = \hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} - (\hat{g} \oslash \hat{P})_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (37)$$

Sabemos que:

$$\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = e^{2\sigma} [R_{\mu\nu\rho\sigma} + (g \oslash S)_{\mu\nu\rho\sigma}] \quad (38)$$

onde $S_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \Upsilon_\nu + \Upsilon_\mu \Upsilon_\nu - \frac{1}{2} |\Upsilon|^2 g_{\mu\nu}$.

E $(\hat{g} \oslash \hat{P})_{\mu\nu\rho\sigma} = e^{2\sigma} (g \oslash \hat{P})_{\mu\nu\rho\sigma}$ pois $\hat{g} = e^{2\sigma} g$ contribui um fator ao produto de Kulkarni-Nomizu.

Mas $\hat{P}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$, portanto:

$$\begin{aligned}\hat{C}_{\mu\nu\rho\sigma} &= e^{2\sigma} [R_{\mu\nu\rho\sigma} + (g \frown S)_{\mu\nu\rho\sigma} - (g \frown P)_{\mu\nu\rho\sigma} - (g \frown S)_{\mu\nu\rho\sigma}] \\ &= e^{2\sigma} [R_{\mu\nu\rho\sigma} - (g \frown P)_{\mu\nu\rho\sigma}] = e^{2\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma}\end{aligned}\quad (39)$$

Subindo um índice: $\hat{C}^\rho_{\mu\sigma\nu} = \hat{g}^{\rho\lambda} \hat{C}_{\lambda\mu\sigma\nu} = e^{-2\sigma} g^{\rho\lambda} \cdot e^{2\sigma} C_{\lambda\mu\sigma\nu} = C^\rho_{\mu\sigma\nu}$. ■

4.3 Decomposição Self-Dual e Anti-Self-Dual em $d = 4$

Em 4 dimensões, o tensor de Weyl admite uma decomposição em partes **self-dual** e **anti-self-dual**. Definindo o dual de Hodge no primeiro par de índices:

$$*C_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\rho\sigma} \quad (40)$$

Como o Weyl em 4D satisfaz $*C = C^*$ (dual esquerdo = dual direito), podemos decompor:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma}^+ + C_{\mu\nu\rho\sigma}^-, \quad C^\pm = \frac{1}{2}(C \pm i *C) \quad (41)$$

Em notação spinorial:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \Psi_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}} + \bar{\Psi}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} \quad (42)$$

onde $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o **spinor de Weyl** (totalmente simétrico, 5 componentes complexas).

4.4 Classificação de Petrov

A classificação de Petrov categoriza os espaços-tempo 4D segundo a estrutura algébrica do spinor de Weyl $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, decompondo-o em **direções principais nulas** (PNDs):

Tipo	PNDs	Multiplicidade	Exemplo físico
I	4 distintas	[1,1,1,1]	Genérico
II	3 (uma dupla)	[2,1,1]	—
D	2 (ambas duplas)	[2,2]	Schwarzschild, Kerr
III	2 (uma tripla)	[3,1]	—
N	1 (quádrupla)	[4]	Ondas gravitacionais pp
O	nenhuma	—	Conformalmente plano (FRW)

Tabela 2: Classificação de Petrov dos espaços-tempo 4D.

Critério: $C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ (tipo O) $\Leftrightarrow$ espaço-tempo conformalmente plano.

5 O Tensor de Cotton

5.1 Definição

O **tensor de Cotton** é definido como a derivada covariante antissimetrizada do tensor de Schouten:

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mu\nu\rho} = \nabla_\rho P_{\mu\nu} - \nabla_\nu P_{\mu\rho} = 2\nabla_{[\rho} P_{\nu]\mu}} \quad (43)$$

Forma equivalente usando Ricci:

$$\mathcal{C}_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{d-2} (\nabla_\rho R_{\mu\nu} - \nabla_\nu R_{\mu\rho}) - \frac{1}{2(d-1)(d-2)} (g_{\mu\nu} \nabla_\rho R - g_{\mu\rho} \nabla_\nu R) \quad (44)$$

5.2 Propriedades

1. **Antissimetria:** $\mathcal{C}_{\mu\nu\rho} = -\mathcal{C}_{\mu\rho\nu}$ (nos dois últimos índices).

2. **Trace-free:** $g^{\mu\nu} \mathcal{C}_{\mu\nu\rho} = 0$.

Demonstração: $g^{\mu\nu} \mathcal{C}_{\mu\nu\rho} = g^{\mu\nu} \nabla_\rho P_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\nu P_{\mu\rho} = \nabla_\rho \left(\frac{R}{2(d-1)} \right) - \nabla^\mu P_{\mu\rho}$.

Pela identidade de Bianchi contraída $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R$, obtemos $\nabla^\mu P_{\mu\rho} = \frac{1}{2(d-1)} \nabla_\rho R$. Logo o traço é zero. ■

3. **Divergência nula:** $\nabla^\rho \mathcal{C}_{\mu\nu\rho} = 0$ (em $d = 3$ corresponde à condição de corrente conservada).

4. **Relação com o Weyl** ($d \geq 4$): $\nabla^\mu \mathcal{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = (d-3) \mathcal{C}_{\nu\rho\sigma}$.

5.3 O Cotton como Invariante Conforme em $d = 3$

Em $d = 3$, o tensor de Weyl é *identicamente nulo* (não existem graus de liberdade conformes de "maré" em 3D). O tensor de Cotton assume o papel de invariante conforme:

$$\boxed{\text{Em } d = 3: \quad \mathcal{C}_{\mu\nu\rho} = 0 \iff \text{espaço conformalmente plano}} \quad (45)$$

Demonstração da invariância conforme em $d = 3$:

Sob $\hat{g} = e^{2\sigma} g$:

$$\hat{\mathcal{C}}_{\mu\nu\rho} = \hat{\nabla}_\rho \hat{P}_{\mu\nu} - \hat{\nabla}_\nu \hat{P}_{\mu\rho} \quad (46)$$

Usando $\hat{P}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} - \nabla_\mu \Upsilon_\nu + \Upsilon_\mu \Upsilon_\nu - \frac{1}{2}|\Upsilon|^2 g_{\mu\nu}$ e $\hat{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + C_\mu$. (com os termos de conexão), após cálculo extenso, verifica-se que todos os termos extras se cancelam em $d = 3$:

$$\hat{C}_{\mu\nu\rho} = C_{\mu\nu\rho} \quad (d = 3) \quad \blacksquare \quad (47)$$

Nota: Em $d \geq 4$, o Cotton *não* é conformemente invariante — ele transforma inhomogeneamente. O invariante conforme é o tensor de Weyl.

5.4 Cotton-York Tensor (Forma Tensorial Simétrica)

Em 3D, define-se o **tensor de Cotton-York** (simétrico e trace-free):

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\rho\sigma} \nabla_\rho \left(R^\nu_\sigma - \frac{1}{4} \delta^\nu_\sigma R \right) \quad (48)$$

Este é o tensor que aparece nas equações de gravitação topologicamente massiva ($d = 3$).

6 Formas de Cartan do Grupo Conforme

6.1 Forma de Maurer-Cartan

Para um grupo de Lie G com álgebra $\mathfrak{g}$, a **forma de Maurer-Cartan** é a 1-forma $\mathfrak{g}$ -valorada canônica:

$$\Theta = g^{-1} dg \in \Omega^1(G) \otimes \mathfrak{g} \quad (49)$$

Para o grupo conforme $SO(2,4)$, decompondo nos geradores:

$$\boxed{\Theta = \Theta^a P_a + \frac{1}{2} \Theta^{ab} M_{ab} + \Theta^{(D)} D + \Theta^a_{(K)} K_a} \quad (50)$$

A equação de Maurer-Cartan expressa a "curvatura nula" desta forma:

$$\boxed{d\Theta + \Theta \wedge \Theta = 0} \quad (51)$$

Demonstração: Diferenciando $\Theta = g^{-1} dg$:

$$d\Theta = d(g^{-1}) \wedge dg = -(g^{-1} dg) \wedge (g^{-1} dg) = -\Theta \wedge \Theta \quad \blacksquare \quad (52)$$

onde usamos $d(g^{-1}) = -g^{-1}(dg)g^{-1}$.

6.2 Conexão de Cartan Conforme

A **conexão de Cartan conforme** é uma 1-forma $\mathfrak{so}(2, 4)$ -valorada sobre o espaço-tempo, que “gauges” o grupo conforme:

$$\omega = e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} + b D + f^a K_a \quad (53)$$

onde:

- $e^a = e^a_\mu dx^\mu$: **vierbein** (tetrad) — gauge das translações
- $\omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu$: **conexão de spin** — gauge de Lorentz
- $b = b_\mu dx^\mu$: **1-forma de Weyl** — gauge da dilatação
- $f^a = f^a_\mu dx^\mu$: **campo conforme especial** — gauge das SCT

6.3 Curvatura de Cartan

A curvatura (“field strength”) associada é:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \quad (54)$$

Decompondo em componentes segundo os geradores, e usando as relações de comutação $[P_a, K_b] = 2(\eta_{ab}D - M_{ab})$, $[D, P_a] = -P_a$, $[D, K_a] = +K_a$, $[M_{ab}, P_c] = \eta_{ac}P_b - \eta_{bc}P_a$ etc., obtemos:

Curvatura de translação (Torção):

$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b - b \wedge e^a + 2\eta^{ab} f_b \wedge e_c \text{ (via } [K, P]) \quad (55)$$

Simplificando com a contribuição dos comutadores:

$$T^a = De^a - b \wedge e^a \quad (56)$$

onde $De^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b$ é a derivada exterior covariante de Lorentz.

Curvatura de Lorentz:

$$R^{ab}(\omega) = d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} + 4e^{[a} \wedge f^{b]} + 4b \wedge \omega^{ab} \text{ (contrib. mista)} \quad (57)$$

Forma padrão:

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} - 4e^{[a} \wedge f^{b]} \quad (58)$$

Curvatura de dilatação:

$$\boxed{F(D) = db + 2e^a \wedge f_a} \quad (59)$$

Curvatura de SCT:

$$\boxed{R^a(K) = df^a + \omega^a_b \wedge f^b + b \wedge f^a} \quad (60)$$

6.4 Equações de Estrutura Explícitas — Demonstração

Derivação de T^a : Expandindo Ω na componente P_a :

$$\begin{aligned} \Omega|_{P_a} &= de^a + [\omega^{ab} M_{ab}, e^c P_c]|_{P_a} + [bD, e^c P_c]|_{P_a} + [f^a K_a, e^c P_c]|_{P_a} \\ &= de^a + \omega^a_b \wedge e^b + (-1) \cdot b \wedge e^a + 0 \\ &= de^a + \omega^a_b \wedge e^b - b \wedge e^a \end{aligned} \quad (61)$$

(O termo $[K_a, P_b] = 2\eta_{ab}D - 2M_{ab}$ contribui para as componentes D e M , não para P .)

Derivação de $F(D)$: Na componente D :

$$\begin{aligned} \Omega|_D &= db + [e^a P_a, f^b K_b]|_D \\ &= db + e^a \wedge f^b \cdot 2\eta_{ab} = db + 2e^a \wedge f_a \end{aligned} \quad (62)$$

6.5 Condições de Curvatura Nula e Geometria de Riemann

Impondo condições algébricas sobre as curvaturas, reduzimos a geometria conforme à geometria riemanniana:

Gauge 1: $T^a = 0$ (torção nula). Isto determina ω^{ab} em termos de e^a e b :

$$\omega^{ab} = \omega_{\text{Levi-Civita}}^{ab}(e) + 2e^{[a} b^{b]} \quad (63)$$

Gauge 2: $b_\mu = 0$ (fixação de gauge de dilatação). Reduz ao formalismo de Cartan usual:

$$\omega^{ab} = \omega_{\text{LC}}^{ab}(e), \quad T^a = 0 \quad (64)$$

Resultado chave: Com ambas as fixações, o campo f^a é determinado algebricamente e coincide com o tensor de Schouten:

$$f_\mu^a = P_\mu^a = \frac{1}{d-2} \left(R_\mu^a - \frac{R}{2(d-1)} e_\mu^a \right) \quad (65)$$

Demonstração: Com $b = 0$ e $T^a = 0$, a curvatura de dilatação $F(D) = 2e^a \wedge f_a$ deve satisfazer a identidade de Bianchi. Impondo $F(D) = 0$ (curvatura de dilatação nula), obtemos $e^a \wedge f_a = 0$, i.e., $f_{[ab]} = 0$ (simétrico em índices frame). A curvatura de Lorentz fica:

$$R^{ab} = R_{\text{Riemann}}^{ab} - 4e^{[a} \wedge f^{b]} \quad (66)$$

Contraindo e usando R_{Riemann}^{ab} , a condição de que R^{ab} satisfaça as simetrias corretas fixa $f_{ab} = P_{ab}$. ■

6.6 Forma de Cartan Normal

A **conexão de Cartan normal** é a conexão conforme canônica obtida fixando:

1. $T^a = 0$ (torção nula)
2. $F(D) = 0$ (curvatura de dilatação nula)

Nesta gauge, a única curvatura não-nula é:

$$R^{ab}|_{\text{normal}} = C^{ab} \quad (\text{tensor de Weyl em índices de frame}) \quad (67)$$

Isto mostra que o **tensor de Weyl** é a **curvatura residual da conexão de Cartan conforme** — o obstáculo à planaridade conforme, expresso intrinsecamente como curvatura de gauge.

7 Operadores Conformemente Covariantes

7.1 Operador de Yamabe (Laplaciano Conforme)

O **operador de Yamabe** (ou Laplaciano conforme) atua sobre escalares de peso conforme $w = \frac{d-2}{2}$:

$$Y\phi = \left(-\Delta + \frac{d-2}{4(d-1)} R \right) \phi \quad (68)$$

onde $\Delta = \nabla^\mu \nabla_\mu$ é o Laplaciano (d'Alembertiano em assinatura lorentziana).

Propriedade de covariância conforme: Sob $\hat{g} = e^{2\sigma}g$, se $\hat{\phi} = e^{-\frac{d-2}{2}\sigma}\phi$, então:

$$\hat{Y}\hat{\phi} = e^{-\frac{d+2}{2}\sigma}Y\phi \quad (69)$$

Demonstração: Usando a transformação do Laplaciano sob Weyl:

$$\hat{\Delta}\hat{\phi} = e^{-\frac{d+2}{2}\sigma} \left[\Delta\phi + (d-2)\Upsilon^\mu \nabla_\mu \phi + \frac{d-2}{2} \left(\nabla^\mu \Upsilon_\mu + \frac{d-4}{2} |\Upsilon|^2 \right) \phi \right] \quad (70)$$

E a transformação de R :

$$\hat{R} = e^{-2\sigma} \left[R - 2(d-1)\nabla^\mu \Upsilon_\mu - (d-1)(d-2)|\Upsilon|^2 \right] \quad (71)$$

Combinando $-\hat{\Delta} + \frac{d-2}{4(d-1)}\hat{R}$ e aplicando a $\hat{\phi} = e^{-\frac{d-2}{2}\sigma}\phi$, os termos com Υ se cancelam, produzindo $e^{-\frac{d+2}{2}\sigma}Y\phi$. ■

7.2 Operador de Paneitz (4^a Ordem)

O **operador de Paneitz** P_4 é o operador diferencial de 4^a ordem conformemente covariante em $d = 4$:

$$P_4\phi = \Delta^2\phi + \nabla^\mu \left(2R_{\mu\nu} - \frac{2}{3}Rg_{\mu\nu} \right) \nabla^\nu \phi + \frac{d-4}{2}Q\phi \quad (72)$$

onde Q é a **Q-curvatura de Branson**:

$$Q = -\frac{1}{6} (\Delta R - R^2 + 3R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) \quad (d = 4) \quad (73)$$

Covariância: Sob $\hat{g} = e^{2\sigma}g$, com $\hat{\phi} = e^{-\frac{d-4}{2}\sigma}\phi$ (em $d = 4$: escalar ordinário):

$$\hat{P}_4\hat{\phi} = e^{-\frac{d+4}{2}\sigma}P_4\phi \quad (74)$$

Em $d = 4$ especificamente: $P_4\phi = \Delta^2\phi + \nabla^\mu (2R_{\mu\nu} - \frac{2}{3}Rg_{\mu\nu})\nabla^\nu \phi$.

7.3 Hierarquia GJMS

Os operadores de **Graham-Jenne-Mason-Sparling** (GJMS) generalizam Yamabe e Paneitz a ordens arbitrárias. O operador GJMS de ordem $2k$ é conformemente covariante:

$$P_{2k} : \mathcal{E} \left[\frac{d-2k}{2} \right] \rightarrow \mathcal{E} \left[\frac{-(d+2k)}{2} \right] \quad (75)$$

onde $\mathcal{E}[w]$ denota densidades conformes de peso w .

- $P_2 = Y$ (Yamabe): $\Delta + \frac{d-2}{4(d-1)}R$
- P_4 (Paneitz): $\Delta^2 + \text{termos de curvatura}$
- P_6 (6^a ordem): existe em todas as dimensões
- P_{2k} para $2k \leq d$: sempre existe; para $2k > d$ pode ter obstruções

Princípio unificador: Todos os operadores GJMS podem ser construídos a partir da **conexão de tractor** (conexão de Cartan conforme) como potências da derivada de tractor — a geometria conforme “gera” automaticamente os operadores covariantes corretos.

Parte III

Forma Matricial dos Geradores Conformes

1 Representação Matricial 6D de SO(2,4)

1.1 Geradores na Representação Fundamental (6×6)

Na representação fundamental de SO(2,4), os geradores J_{AB} são matrizes antissimétricas 6×6 (com a métrica η_{AB}). A base é $(X^0, X^1, X^2, X^3, X^4, X^5)$ com $\eta =$

$\text{diag}(+, -, -, -, -, +)$.

O gerador J_{AB} tem entradas:

$$(J_{AB})^C_D = i(\eta_{AD}\delta_B^C - \eta_{BD}\delta_A^C) \quad (76)$$

Exemplos explícitos:

Rotação no plano 12 (M_{12}):

$$J_{12} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

Dilatação ($D = J_{45}$):

$$D = J_{45} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Translação P_μ e SCT K_μ (combinações lineares):

$$P_\mu = J_{\mu 4} + J_{\mu 5}, \quad K_\mu = J_{\mu 4} - J_{\mu 5} \quad (79)$$

Para $P_0 = J_{04} + J_{05}$:

$$P_0 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (80)$$

1.2 Verificação das Relações de Comutação

Calculemos $[D, P_0]$ matricialmente:

$$[J_{45}, J_{04} + J_{05}] = [J_{45}, J_{04}] + [J_{45}, J_{05}] \quad (81)$$

$$= i(\eta_{44}J_{50} - \eta_{54}J_{40}) + i(\eta_{45}J_{50} - \eta_{55}J_{40}) \quad (82)$$

$$= i(-J_{50}) + i(-J_{40}) = -i(J_{40} + J_{50}) = -iP_0 \quad \checkmark \quad (83)$$

2 Representação Spinorial 4×4 — Matrizes de Dirac

2.1 Isomorfismo $\mathfrak{so}(2, 4) \cong \mathfrak{su}(2, 2)$

A álgebra conforme tem uma representação **spinorial** por matrizes 4×4 via as matrizes gama 6D. Usando as matrizes gama de Dirac γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) em 4D:

$$\Gamma^A = (\gamma^\mu, \gamma^4, \gamma^5), \quad \gamma^4 = \gamma_{\text{quiral}}^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma^5 = \mathbf{1}_4 \quad (84)$$

Os geradores na representação spinorial:

$$\boxed{\Sigma_{AB} = \frac{1}{4}[\Gamma_A, \Gamma_B] = \frac{1}{2}\Gamma_{AB}} \quad (85)$$

2.2 Forma Explícita (Representação de Weyl)

Na representação de Weyl das matrizes de Dirac:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}) \quad (86)$$

Os geradores conformes na representação spinorial 4×4 :

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \\
D &= \frac{1}{2}\gamma^4 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P_\mu &= \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma^4 + \gamma_\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
K_\mu &= \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma^4 - \gamma_\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{87}$$

onde $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu)$.

Estrutura de Blocos 4×4 dos Geradores

	L	R
L	$\sigma_{\mu\nu}$	$\sigma_\mu (P_\mu)$
R	$\bar{\sigma}_\mu (K_\mu)$	$\bar{\sigma}_{\mu\nu}$

L = spinor left $(1/2, 0)$, R = spinor right $(0, 1/2)$

P_μ : bloco superior direito (sobe quiralidade)

K_μ : bloco inferior esquerdo (desce quiralidade)

2.3 Interpretação: P_μ e K_μ como Operadores de Escada

A estrutura de blocos mostra claramente:

- P_μ está no bloco **superior-direito**: "sobe" de right-handed para left-handed (aumenta dimensão).
- K_μ está no bloco **inferior-esquerdo**: "desce" de left-handed para right-handed (diminui dimensão).
- $M_{\mu\nu}$ e D são **diagonais em blocos**: preservam a quiralidade.

3 Operadores de Criação e Aniquilação Conformes

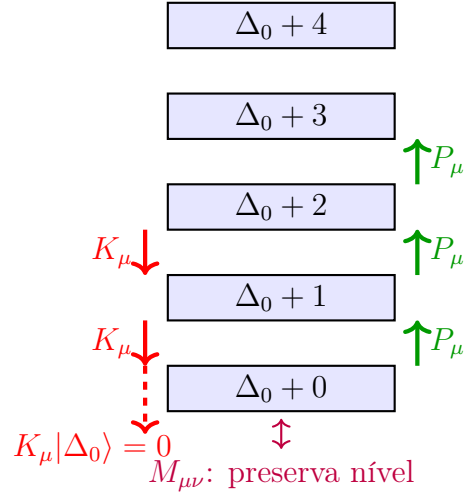
3.1 Estrutura de Álgebra de Escada

Podemos organizar a álgebra conforme como uma **álgebra de escada** com respeito a D :

$$[D, P_\mu] = -iP_\mu \implies P_\mu \text{ é operador de criação (sobe } \Delta \text{ em 1)} \quad (88)$$

$$[D, K_\mu] = +iK_\mu \implies K_\mu \text{ é operador de aniquilação (desce } \Delta \text{ em 1)} \quad (89)$$

$$[D, M_{\mu\nu}] = 0 \implies M_{\mu\nu} \text{ preserva } \Delta \quad (90)$$



3.2 Quantização Radial e o Mapa Estado-Operador

Em quantização radial, D é o Hamiltoniano e as "fatias de tempo" são esferas S^{d-1} :

$$\text{Operador } \mathcal{O}(0) \longleftrightarrow \text{Estado } |\mathcal{O}\rangle \text{ em } S^{d-1} \quad (91)$$

O espaço de Hilbert tem decomposição:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\Delta, l} V_{\Delta, l} \otimes \bar{V}_{\Delta, l} \quad (92)$$

Os operadores agem como:

$$P_\mu|\Delta, l\rangle = |\Delta + 1, l'\rangle, \quad K_\mu|\Delta, l\rangle = |\Delta - 1, l''\rangle \quad (93)$$

A norma dos descendentes:

$$\langle \Delta | K^\mu P_\mu | \Delta \rangle = \langle \Delta | [K^\mu, P_\mu] | \Delta \rangle = 2d \Delta > 0 \quad (\text{unitariedade!}) \quad (94)$$

3.3 Álgebra $\mathfrak{su}(2, 2)$ em Termos de Osciladores

Podemos realizar os geradores via **osciladores bosônicos** $a_\alpha, b_{\dot{\alpha}}$ ($\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$):

$$\boxed{\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= a_{(\alpha}^\dagger a_{\beta)} \\ \bar{M}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= b_{(\dot{\alpha}}^\dagger b_{\dot{\beta})} \\ P_{\alpha\beta} &= a_\alpha^\dagger b_{\dot{\beta}}^\dagger \\ K^{\dot{\alpha}\beta} &= b^{\dot{\alpha}} a^\beta \\ D &= \frac{1}{2}(a_\alpha^\dagger a^\alpha + b_{\dot{\alpha}}^\dagger b^{\dot{\alpha}} + 2) \end{aligned}} \quad (95)$$

com $[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$, $[b_{\dot{\alpha}}, b_{\dot{\beta}}^\dagger] = \delta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. Esta é a realização de **Schwinger** da álgebra conforme — permite construir representações explicitamente contando ocupações de osciladores.

Parte IV

SU(2,2), Twistors e Férmions Conformes

1 O Grupo SU(2,2)

1.1 Definição e Estrutura

SU(2, 2) é o grupo de matrizes 4×4 complexas que preservam a forma hermitiana de assinatura (2, 2):

$$\boxed{U^\dagger \Omega U = \Omega, \quad \det U = 1, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}} \quad (96)$$

A álgebra de Lie:

$$\mathfrak{su}(2, 2) = \{X \in M_4(\mathbb{C}) : X^\dagger \Omega + \Omega X = 0, \text{Tr}(X) = 0\} \quad (97)$$

Dimensão real: $4^2 - 1 = 15$ (coincide com $\text{SO}(2,4)!$).

1.2 Isomorfismo com $\text{SO}(2,4)$

O isomorfismo local $\text{SU}(2, 2) \cong \text{Spin}(2, 4)$ é a cobertura dupla:

$$\text{SU}(2, 2)/\mathbb{Z}_2 \cong \text{SO}_0(2, 4) \quad (98)$$

Os spinors de Dirac em 6D (espaço embedding) são os vetores fundamentais 4-dimensionais de $\text{SU}(2,2)$ — estes são os **twistors**.

1.3 Decomposição em Blocos

Uma matriz $U \in \text{SU}(2, 2)$ decompõe-se em blocos 2×2 :

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A^\dagger A - C^\dagger C = \mathbf{1}_2 \quad (99)$$

A ação de Möbius no espaço conforme compactificado:

$$Z \mapsto (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad (100)$$

onde Z é uma matrix 2×2 parametrizando o espaço-tempo compactificado $\overline{\mathbb{R}^{1,3}} \cong \text{U}(2)$.

2 Twistors

2.1 Definição de Twistor

Um **twistor** é um spinor de $SU(2,2)$, i.e., um elemento de $\mathbb{C}^4$ na representação fundamental:

$$Z^A = \begin{pmatrix} \omega^\alpha \\ \pi_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad A = 1, 2, 3, 4; \quad \alpha = 1, 2; \quad \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2} \quad (101)$$

onde ω^α é um spinor de Weyl left-handed e $\pi_{\dot{\alpha}}$ é um spinor right-handed.

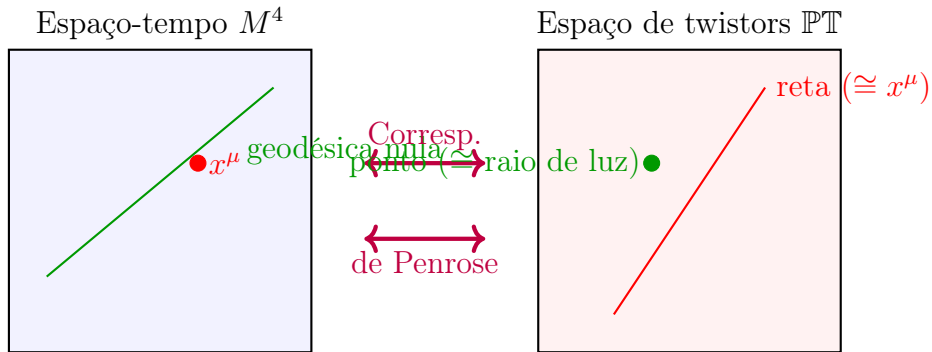
2.2 Espaço de Twistors $\mathbb{PT}$

O **espaço de twistors projetivo** é $\mathbb{PT} = \mathbb{CP}^3$ (3-dimensional complexo). O espaço-tempo de Minkowski compactificado é o espaço de retas em $\mathbb{PT}$.

Relação de incidência:

$$\omega^\alpha = ix^{\alpha\dot{\beta}} \pi_{\dot{\beta}} \quad (102)$$

onde $x^{\alpha\dot{\beta}} = x^\mu (\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\beta}}$ é o ponto do espaço-tempo em coordenadas spinoriais.



2.3 Correspondência Ponto $\leftrightarrow$ Reta

Espaço-tempo M^4	Espaço de twistors $\mathbb{PT}$
Ponto x^μ	Reta $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$
Raio de luz (geodésica nula)	Ponto $Z^A \in \mathbb{CP}^3$
Dois pontos separados por luz	Duas retas que se intersectam
Ponto no infinito	Reta passando por região especial

2.4 Norma de Twistor e Helicidade

A forma hermitiana preservada por $SU(2,2)$:

$$\langle Z|Z\rangle = Z^\dagger \Omega Z = |\omega^1|^2 + |\omega^2|^2 - |\pi_1|^2 - |\pi_2|^2 \quad (103)$$

A helicidade de uma partícula sem massa é:

$$h = \frac{1}{2}(n_\omega - n_\pi) = \frac{1}{2} \left(\omega^\alpha \frac{\partial}{\partial \omega^\alpha} - \pi_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \pi_{\dot{\alpha}}} \right) \quad (104)$$

- $h > 0$: partícula com helicidade positiva (self-dual).
- $h < 0$: helicidade negativa (anti-self-dual).
- $h = 0$: escalar conforme.

2.5 Funções de Onda em Espaço de Twistors

Uma partícula sem massa de helicidade h é descrita por uma função homogênea de grau $-2h - 2$ em $\mathbb{PT}$:

$$f(\lambda Z) = \lambda^{-2h-2} f(Z) \quad (105)$$

Exemplos:

- Fóton ($h = +1$): $f(Z) \sim \pi_{\dot{\alpha}}^{-4}$ (grau -4).
- Gráviton ($h = +2$): $f(Z) \sim \pi_{\dot{\alpha}}^{-6}$ (grau -6).
- Escalar ($h = 0$): $f(Z) \sim \pi_{\dot{\alpha}}^{-2}$ (grau -2).

3 Férmiões Conformes

3.1 Equação de Dirac Conforme

A equação de Dirac sem massa $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$ é conformemente invariante com $\Delta_\psi = (d-1)/2 = 3/2$ em $d = 4$.

Sob transformação conforme $x \rightarrow x'$ com fator Ω :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \Omega(x)^{-(d-1)/2} S(x) \psi(x) \quad (106)$$

onde $S(x) \in \text{Spin}(1, 3)$ é a rotação de Lorentz local induzida.

3.2 Propagador Conforme para Férmions

O propagador de 2 pontos de um campo spinorial conforme:

$$\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}^{\dot{\beta}}(0) \rangle = \frac{(\sigma^\mu)_\alpha^{\dot{\beta}} x_\mu}{|x|^{2\Delta+1}} = \frac{(\not{x})_\alpha^{\dot{\beta}}}{|x|^4} \quad (107)$$

Para férmions com spin $(1/2, 0)$ na representação dotada:

$$\langle \psi_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_2) \rangle = \frac{C_\psi (x_{12})_{\alpha\dot{\gamma}} (\bar{x}_{12})^{\dot{\gamma}\beta}}{|x_{12}|^{2\Delta_\psi+1}} \quad (108)$$

3.3 Supertwistors

Para teorias superconformes com $\mathcal{N}$ supercargas, o twistor se estende a um **supertwistor**:

$$\mathcal{Z}^A = \begin{pmatrix} Z^A \\ \eta^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^\alpha \\ \pi_{\dot{\alpha}} \\ \eta^I \end{pmatrix}, \quad I = 1, \dots, \mathcal{N} \quad (109)$$

onde η^I são coordenadas de Grassmann. O grupo de simetria é $\text{SU}(2, 2|\mathcal{N})$.

Para $\mathcal{N} = 4$: $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{4|4}$, e as amplitudes de espalhamento são "volumes" no super-

espaço de twistors.

Parte V

Representações do Grupo Conforme

1 Operadores Primários e Descendentes

1.1 Definição de Operador Primário

Um **operador primário** $\mathcal{O}(x)$ de dimensão Δ e spin (j_1, j_2) satisfaz na origem:

$$\begin{aligned} [D, \mathcal{O}(0)] &= -i\Delta \mathcal{O}(0) \\ [K_\mu, \mathcal{O}(0)] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, \mathcal{O}(0)] &= \Sigma_{\mu\nu} \mathcal{O}(0) \end{aligned} \tag{110}$$

onde $\Sigma_{\mu\nu}$ é a representação de spin do operador. A condição $[K_\mu, \mathcal{O}(0)] = 0$ é a condição de **estado de peso mais baixo** — análoga ao "vácuo" aniquilado pelos operadores de descida.

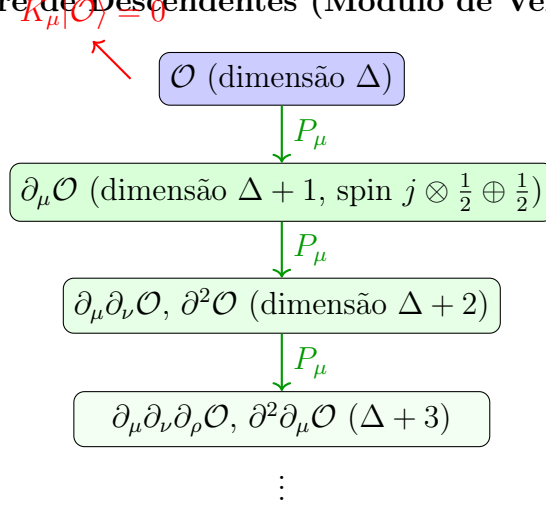
1.2 Operadores Descendentes

Aplicando P_μ (que sobe a dimensão em 1) repetidamente:

$$\partial_\mu \mathcal{O}(x), \quad \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{O}(x), \quad \partial^2 \mathcal{O}(x), \quad \dots \tag{111}$$

são **descendentes** de $\mathcal{O}$ com dimensões $\Delta + 1, \Delta + 2$, etc.

Torre de Descendentes (Módulo de Verma)



A representação irredutível do grupo conforme é determinada por (Δ, j_1, j_2) — um primário mais todos os seus descendentes formam um **módulo conforme**.

1.3 Limites de Unitariedade

Para que a representação seja unitária (normas positivas), os operadores primários devem satisfazer:

Escalar ($j_1 = j_2 = 0$) : $\Delta \geq 1$ ($d = 4$) Spinor ($j = \frac{1}{2}$) : $\Delta \geq \frac{3}{2}$ Vetor ($j = 1$) : $\Delta \geq 3$ (genérico), $\Delta = 2$ (conservado) Tensor simétrico spin- l : $\Delta \geq l + 2$ (genérico), $\Delta = l + 2$ (conservado)	(112)
--	-------

Operadores que saturam o bound de unitariedade com $\Delta = l + 2$ são **correntes conservadas** ($\partial^\mu J_\mu = 0$).

2 Casimir do Grupo Conforme

2.1 Casimir Quadrático

$$C_2 = \frac{1}{2} J_{AB} J^{AB} = D^2 + \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \{P_\mu, K^\mu\} \quad (113)$$

Autovalor numa representação (Δ, j_1, j_2) :

$$\boxed{C_2 = \Delta(\Delta - 4) + 2j_1(j_1 + 1) + 2j_2(j_2 + 1)} \quad (114)$$

2.2 Casimir Quártico

$$C_4 = J_{AB} J^{BC} J_{CD} J^{DA} \quad (115)$$

Autovalor: depende de Δ , j_1 , j_2 de forma mais complexa. Importante para distinguir representações com mesmo C_2 .

3 Correladores e a OPE

3.1 Funções de 2 Pontos

A simetria conforme fixa completamente as funções de 2 pontos:

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \frac{c_{12} \delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}}} \quad (116)$$

Demonstração: Invariância sob translação implica depender de $x_{12} = x_1 - x_2$. Invariância sob rotação implica depender de $|x_{12}|$. Invariância sob dilatação ($x \rightarrow \lambda x$) fixa o expoente: $\lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} f(\lambda |x_{12}|) = f(|x_{12}|)$, logo $f \propto |x_{12}|^{-\Delta_1 - \Delta_2}$. Invariância sob SCT fixa $\Delta_1 = \Delta_2$.

3.2 Funções de 3 Pontos

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{|x_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_{13}|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2} |x_{23}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}}} \quad (117)$$

Os coeficientes C_{123} (constantes de estrutura da OPE) são os **dados da CFT** — junto com Δ_i , determinam toda a teoria.

3.3 Funções de 4 Pontos e Razões Cruzadas

A partir de 4 pontos, aparecem graus de liberdade não-fixados pela simetria conforme — as **razões cruzadas** (cross-ratios):

$$u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2} \quad (118)$$

A função de 4 pontos de escalares idênticos:

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \mathcal{O}(x_3) \mathcal{O}(x_4) \rangle = \frac{g(u, v)}{|x_{12}|^{2\Delta} |x_{34}|^{2\Delta}} \quad (119)$$

A função $g(u, v)$ é determinada pela **OPE** e pelos **blocos conformes**.

3.4 Operator Product Expansion (OPE)

$$\boxed{\mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(0) = \sum_k C_{12k} |x|^{\Delta_k - \Delta_1 - \Delta_2} [\mathcal{O}_k(0) + \text{descendentes}]}$$
(120)

$$= \sum_k C_{12k} \text{bloco conforme } \begin{array}{c} \mathcal{O}_k \\ \text{---} \mathcal{O}_k \\ \text{---} \partial^2 \mathcal{O}_k \end{array}$$

3.5 Blocos Conformes

Os **blocos conformes** $G_{\Delta, l}(u, v)$ resumem a contribuição de um primário e todos os seus descendentes à função de 4 pontos:

$$g(u, v) = \sum_{\Delta, l} |C_{12\mathcal{O}}|^2 G_{\Delta, l}(u, v) \quad (121)$$

Em $d = 4$, os blocos conformes têm forma fechada (Dolan-Osborn):

$$G_{\Delta, l}(u, v) = \frac{z\bar{z}}{z - \bar{z}} [k_{\Delta+l}(z)k_{\Delta-l-2}(\bar{z}) - (z \leftrightarrow \bar{z})] \quad (122)$$

onde $u = z\bar{z}$, $v = (1 - z)(1 - \bar{z})$ e $k_\beta(x) = x^{\beta/2} {}_2F_1(\beta/2, \beta/2; \beta; x)$.

Parte VI

Campos Conformes e Representações Diferenciais

1 Transformação Finita de Campos

1.1 Lei de Transformação de Campo Primário

Sob uma transformação conforme $x \rightarrow x'$, um campo escalar primário de dimensão Δ transforma-se como:

$$\boxed{\phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d} \phi(x) = \Omega(x)^{-\Delta} \phi(x)} \quad (123)$$

Verificação para dilatação $x' = \lambda x$: $|\partial x' / \partial x| = \lambda^d$, logo:

$$\phi'(\lambda x) = \lambda^{-\Delta} \phi(x) \implies \phi(\lambda x) = \lambda^{-\Delta} \phi(x) \quad (124)$$

Verificação para SCT: O Jacobiano da SCT é:

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{(1 + 2b \cdot x + b^2 x^2)^d} \quad (125)$$

1.2 Transformação de Campos com Spin

Para um campo tensorial de spin l (representação $(l/2, l/2)$):

$$\boxed{T'_{\mu_1 \dots \mu_l}(x') = \Omega(x)^{-\Delta} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\mu_l}} T_{\nu_1 \dots \nu_l}(x)} \quad (126)$$

1.3 Spinor Conforme

Para um spinor de Weyl na representação $(1/2, 0)$ de dimensão Δ :

$$\psi'_\alpha(x') = \Omega(x)^{-\Delta} S(x)_\alpha^\beta \psi_\beta(x) \quad (127)$$

onde $S(x) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ é a transformação de Lorentz local induzida pela transformação conforme.

2 Representações Diferenciais dos Geradores

2.1 Ação sobre Campos Escalares

Para um campo escalar $\phi(x)$ de dimensão Δ :

$$\boxed{\begin{aligned} P_\mu \phi(x) &= -i \partial_\mu \phi(x) \\ M_{\mu\nu} \phi(x) &= i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi(x) \\ D \phi(x) &= -i(x^\mu \partial_\mu + \Delta) \phi(x) \\ K_\mu \phi(x) &= -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu + 2\Delta x_\mu) \phi(x) \end{aligned}} \quad (128)$$

Verificação: Calculemos $[D, P_\mu]\phi$:

$$[D, P_\mu]\phi = D(P_\mu \phi) - P_\mu(D\phi) \quad (129)$$

$$= -(x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi + \Delta \partial_\mu \phi) + (\partial_\mu x^\nu \partial_\nu \phi + x^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi + \Delta \partial_\mu \phi) \quad (130)$$

$$= \partial_\mu \phi = -i(P_\mu \phi) \cdot i = -i P_\mu \phi \quad \checkmark \quad (131)$$

2.2 Ação sobre Campos Vetoriais

Para um campo vetorial $V_\nu(x)$ de dimensão Δ :

$$\begin{aligned}
P_\mu V_\nu &= -i\partial_\mu V_\nu \\
M_{\mu\nu} V_\rho &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)V_\rho + i(\eta_{\mu\rho}V_\nu - \eta_{\nu\rho}V_\mu) \\
D V_\nu &= -i(x^\mu\partial_\mu + \Delta)V_\nu \\
K_\mu V_\nu &= -i[(2x_\mu x^\lambda\partial_\lambda - x^2\partial_\mu + 2\Delta x_\mu)V_\nu \\
&\quad + 2(\eta_{\mu\nu}x^\rho - \delta_\mu^\rho x_\nu)V_\rho]
\end{aligned} \tag{132}$$

O termo extra em K_μ (última linha) é a contribuição do **spin** — sem ele, K_μ não fecharia a álgebra para campos com spin.

2.3 Ação sobre Campos Spinoriais

Para um spinor de Dirac $\psi_\alpha(x)$ de dimensão $\Delta = 3/2$ (campo livre):

$$\begin{aligned}
P_\mu \psi &= -i\partial_\mu \psi \\
M_{\mu\nu} \psi &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\psi + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\psi \\
D \psi &= -i(x^\mu\partial_\mu + \Delta)\psi \\
K_\mu \psi &= -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu + 2\Delta x_\mu)\psi + 2x^\nu\sigma_{\mu\nu}\psi
\end{aligned} \tag{133}$$

onde $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ é o gerador de Lorentz na representação spinorial.

2.4 Fórmula Geral Compacta

Para qualquer campo $\Phi^a(x)$ na representação (j_1, j_2) com dimensão Δ :

$$K_\mu \Phi^a = -i(2x_\mu x^\lambda\partial_\lambda - x^2\partial_\mu + 2\Delta x_\mu)\Phi^a + 2x^\nu(S_{\mu\nu})^a_b \Phi^b \tag{134}$$

onde $(S_{\mu\nu})^a_b$ é a matriz de spin na representação (j_1, j_2) do grupo de Lorentz.

3 Tensores Simétricos Traceless

3.1 Representação Diferencial para Tensor Simétrico de Spin l

Um campo $T_{\mu_1 \dots \mu_l}(x)$ simétrico e traceless na representação $(l/2, l/2)$ com dimensão Δ . A ação de K_ρ :

$$\begin{aligned}
K_\rho T_{\mu_1 \dots \mu_l} = & \left[-i(2x_\rho x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\rho + 2\Delta x_\rho) \right] T_{\mu_1 \dots \mu_l} \\
& + 2i \sum_{j=1}^l (\eta_{\rho\mu_j} x^\sigma T_{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_l} - x_{\mu_j} T_{\mu_1 \dots \rho \dots \mu_l}) \\
& + 2i \sum_{j=1}^l \eta_{\rho\mu_j} \left(-\frac{1}{l} x_{\mu_j} \eta^{\sigma\tau} T_{\mu_1 \dots \sigma \dots \tau \dots \mu_l} \right)_{\text{traceless}}
\end{aligned} \tag{135}$$

Exemplo: Tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ ($l = 2$, $\Delta = 4$):

$$K_\rho T_{\mu\nu} = K_\rho^{\text{orb}} T_{\mu\nu} + 2i(\eta_{\rho\mu} x^\sigma T_{\sigma\nu} + \eta_{\rho\nu} x^\sigma T_{\mu\sigma} - x_\mu T_{\rho\nu} - x_\nu T_{\mu\rho}) \tag{136}$$

A conservação $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ é compatível com $\Delta_T = d$ (saturação do unitarity bound para spin 2).

3.2 Formalismo de Índice-Free (Encoding Polynomial)

Para evitar a complexidade dos índices, usa-se um vetor auxiliar nulo z^μ ($z^2 = 0$):

$$T(x, z) = T_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) z^{\mu_1} \dots z^{\mu_l} \tag{137}$$

A condição traceless é automática ($z^2 = 0$). Os geradores agem como operadores diferenciais em (x, z) :

$$\begin{aligned}
D T(x, z) &= -(x \cdot \partial_x + \Delta) T(x, z) \\
K_\mu T(x, z) &= -(2x_\mu x \cdot \partial_x - x^2 \partial_{x\mu} + 2\Delta x_\mu + 2x \cdot z \partial_{z\mu} - 2z_\mu x \cdot \partial_z) T(x, z)
\end{aligned} \tag{138}$$

4 Tensores Antissimétricos (p -formas)

4.1 Representação de uma p -Forma Conforme

Um campo antissimétrico $B_{\mu_1 \dots \mu_p}(x)$ está na representação $\underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots)}_p$ do grupo de Lorentz. Para uma p -forma conforme de dimensão Δ :

$$K_\rho B_{\mu_1 \dots \mu_p} = K_\rho^{\text{orb}} B_{\mu_1 \dots \mu_p} + 2i \sum_{j=1}^p (-1)^j (\eta_{\rho\mu_j} x^\sigma B_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_j \dots \sigma} - x_{\mu_j} B_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_j \dots \rho}) \tag{139}$$

Exemplo: Campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ ($p = 2, \Delta = 2$):

O tensor de Faraday em uma CFT livre tem $\Delta = 2$. A ação de K_ρ :

$$K_\rho F_{\mu\nu} = -i(2x_\rho x^\lambda \partial_\lambda - x^2 \partial_\rho + 4x_\rho) F_{\mu\nu} \quad (140)$$

$$+ 2i(\eta_{\rho\mu} x^\sigma F_{\sigma\nu} - \eta_{\rho\nu} x^\sigma F_{\sigma\mu} - x_\mu F_{\rho\nu} + x_\nu F_{\rho\mu}) \quad (141)$$

A decomposição em self-dual e anti-self-dual:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^+ + F_{\mu\nu}^-, \quad F^\pm = \frac{1}{2}(F \pm \tilde{F}) \quad (142)$$

onde F^+ está na representação $(1, 0)$ e F^- na $(0, 1)$.

4.2 Formas Diferenciais e Invariância Conforme

Uma p -forma $\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ tem peso conforme:

$$\omega \rightarrow \Omega^w \omega \quad \text{sob } g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (143)$$

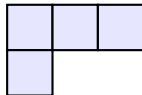
O operador de Hodge transforma como: $*\omega \rightarrow \Omega^{d-2p+w} *\omega$. A equação de Maxwell $d * F = 0$ é conformemente invariante em $d = 4$ porque:

$$d(\Omega^{d-2\cdot 2+w} * F) = d(\Omega^w * F) = 0 \quad \text{se } w = 0 \quad (144)$$

5 Representações Mistas (Diagramas de Young)

5.1 Tensores de Simetria Mista

Para representações gerais do grupo de Lorentz, usamos **diagramas de Young**. Em $d = 4$, as representações irredutíveis são rotuladas por (j_1, j_2) com $j_1, j_2 \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$.



$(3/2, 1/2)$
 “hook” tensor
 $T_{\mu\nu,\rho}$ (simétrico em $\mu\nu$,
 antissimétrico em $(\mu\nu)\rho$)



$(1, 1)$
 Tensor de Riemann
 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$
 (2 pares antissim.)

5.2 Representação Diferencial para Hook Tensor

Tensor com simetria "hook": simétrico em $(\mu\nu)$, com a condição $T_{\mu\nu,\nu} = 0$. Na representação $(3/2, 1/2)$, Δ livre = 3. A ação de K_σ :

$$K_\sigma T_{\mu\nu,\rho} = \mathcal{Y} [K_\sigma^{\text{orb}+\text{spin total}}] T_{\mu\nu,\rho} \quad (145)$$

onde $\mathcal{Y}$ é o projetor de Young para a representação.

5.3 Embedding Formalism (Todorov)

O método mais eficiente para campos de simetria mista é o **embedding formalism**. Trabalhamos no espaço 6D com coordenadas X^A no cone nulo $X^2 = 0$:

$$T(X, Z_1, Z_2, \dots) \quad (\text{campo no cone nulo com vetores de polarização}) \quad (146)$$

Os geradores conformes agem **linearmente** no espaço embedding:

$$J_{AB} T(X, Z_i) = \left(X_A \partial_{X_B} - X_B \partial_{X_A} + \sum_i Z_{iA} \partial_{Z_{iB}} - Z_{iB} \partial_{Z_{iA}} \right) T \quad (147)$$

6 Correntes Conservadas de Spin Superior

Para correntes conservadas de spin l ($J_{\mu_1 \dots \mu_l}$ com $\partial^{\mu_1} J_{\mu_1 \dots \mu_l} = 0$), a dimensão é fixa:

$$\Delta_J = l + d - 2 \quad (\text{shortening condition}) \quad (148)$$

Em $d = 4$: $\Delta = l + 2$. Exemplos:

- $l = 1$: Corrente vetorial J_μ , $\Delta = 3$.
- $l = 2$: Tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, $\Delta = 4$.
- $l = 3$: Corrente de spin-3, $\Delta = 5$ (existe em teorias livres).
- $l = 4$: Corrente de spin-4, $\Delta = 6$.

Teorema de Maldacena-Zhiboedov: Uma CFT 3D com uma corrente conservada de spin $l > 2$ é necessariamente **livre**.

7 Dimensão de Escalonamento e Correntes

7.1 Dimensão Canônica vs. Anômala

A **dimensão canônica** Δ_0 é determinada pela teoria livre:

Campo	Spin	Δ_0 ($d = 4$)	Representação de Lorentz
Escalar ϕ	0	1	$(0, 0)$
Spinor ψ	1/2	3/2	$(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$
Vetor A_μ	1	1	$(1/2, 1/2)$
Intensidade $F_{\mu\nu}$	1	2	$(1, 0) \oplus (0, 1)$
Graviton $h_{\mu\nu}$	2	2	$(1, 1)$

Em teorias interagentes, a dimensão recebe correções: $\Delta = \Delta_0 + \gamma$, onde γ é a **dimensão anômala**.

7.2 Correntes Conservadas e Proteção

Se $\partial^\mu J_\mu = 0$, então $\Delta_J = d - 1 = 3$ (exato, protegido contra correções quânticas).

Se $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ (tensor energia-momento), então $\Delta_T = d = 4$ (exato).

8 Ward Identities Conformes

8.1 Ward Identity para Dilatação

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i^\mu \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} + \Delta_i \right) \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = 0 \quad (149)$$

8.2 Ward Identity para SCT

$$\sum_{i=1}^n (2\Delta_i x_{i\mu} + 2x_i^\nu S_{i,\mu\nu} + 2x_{i\mu} x_i^\nu \partial_{i\nu} - x_i^2 \partial_{i\mu}) \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle = 0 \quad (150)$$

Estas identidades, junto com as de translação e rotação, fixam completamente as

funções de 2 e 3 pontos.

Parte VII

Quebra de Simetria Conforme

1 Mecanismos de Quebra

1.1 Quebra Explícita

A simetria conforme é quebrada explicitamente por:

- **Massas:** Termos $m^2\phi^2$ ou $m\bar{\psi}\psi$ introduzem uma escala.
- **Constante cosmológica:** $\Lambda g_{\mu\nu}$ quebra a invariância de escala do vácuo.
- **Acoplamentos dimensionais:** Em $d \neq 4$, a constante de acoplamento de gauge tem dimensão.
- **Operadores relevantes:** Qualquer operador com $\Delta < d$ cresce no IR e quebra a simetria conforme.

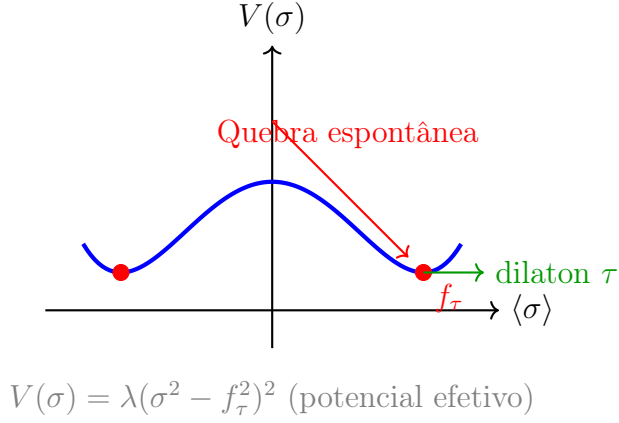
1.2 Quebra Espontânea (Dilaton)

Se a simetria conforme é quebrada espontaneamente, surge um bóson de Goldstone sem massa — o **dilaton** $\tau(x)$:

$$\langle D \rangle \neq 0 \implies \exists \tau : \quad \tau(x) \rightarrow \tau(x) + \text{const. sob dilatação} \quad (151)$$

O dilaton acopla-se ao traço do tensor energia-momento:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{dilaton}} = \frac{1}{2}(\partial\tau)^2 + \frac{\tau}{f_\tau} T^\mu{}_\mu} \quad (152)$$



1.3 Dilaton Efetivo e Física do Higgs

Se a quebra eletrofraca está relacionada à quebra conforme, o Higgs pode ser um "dilaton composito" ou mistura de Higgs com dilaton:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial h)^2 + \frac{1}{2}(\partial \tau)^2 - V(h, \tau) + \frac{h}{v}(m_f \bar{f} f + 2m_W^2 W^+ W^- + \dots) + \frac{\tau}{f_\tau} T_\mu^\mu \quad (153)$$

Se $f_\tau \gg v$: dilaton desacoplado, Higgs padrão. Se $f_\tau \sim v$: mistura significativa, desvios nos acoplamentos do Higgs.

2 Anomalia Conforme e Quebra Quântica

2.1 Anomalia de Traço

Mesmo que a teoria clássica seja conforme ($T_\mu^\mu = 0$), a regulação quântica pode quebrar esta simetria:

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \beta(g) F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (\text{termos gravitacionais}) \quad (154)$$

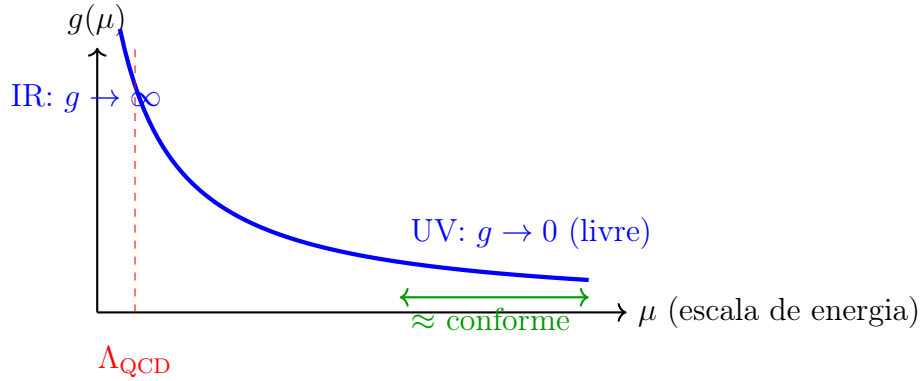
onde $\beta(g)$ é a função beta do grupo de renormalização. Em uma teoria conformemente invariante **exata**, $\beta(g) = 0$ (ponto fixo).

2.2 Exemplo: QCD e Transmutação Dimensional

Em QCD sem quarks, $\beta(g) < 0$ (liberdade assintótica):

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \frac{\beta(g)}{2g} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} = -\frac{b_0 \alpha_s}{8\pi} G^2 \neq 0 \quad (155)$$

A escala Λ_{QCD} emerge via **transmutação dimensional**: uma teoria classicamente conforme gera uma escala puramente quântica.



3 CFTs com Simetria Conforme Exata

3.1 Exemplos em 4D

- **$\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills:** $\beta = 0$ exatamente para todo valor de g e N .
- **Ponto fixo de Banks-Zaks:** QCD com N_f sabores em $11N_c/2 > N_f > 34N_c^3/(13N_c^2 - 3)$.
- **Teorias de Argyres-Douglas:** CFTs 4D $\mathcal{N} = 2$ não-lagrangianas com operadores de dimensão fracionária.

3.2 Condições para Ponto Fixo

$$\beta_i(g^*) = 0 \quad \forall i, \quad \gamma_m(g^*) = \Delta - \Delta_0 \quad (156)$$

No ponto fixo, a teoria é uma CFT com operadores de dimensão definida (possi-

velmente irracional).

Parte VIII

Unpartículas (Unparticle Physics)

1 Motivação e Conceito

1.1 A Ideia de Georgi (2007)

Howard Georgi propôs que pode existir um setor conforme oculto que interage fracamente com o Modelo Padrão. As excitações deste setor, chamadas **unpartículas**, não são partículas no sentido usual — não possuem massa definida.

Uma partícula de massa m tem função espectral:

$$\rho_{\text{partícula}}(P^2) = \delta(P^2 - m^2) \quad (157)$$

Uma unpartícula de dimensão $d_{\mathcal{U}}$ tem função espectral **contínua**:

$$\boxed{\rho_{\mathcal{U}}(P^2) = A_{d_{\mathcal{U}}} \theta(P^0) \theta(P^2) (P^2)^{d_{\mathcal{U}}-2}} \quad (158)$$

onde:

$$A_{d_{\mathcal{U}}} = \frac{16\pi^{5/2}}{(2\pi)^{2d_{\mathcal{U}}}} \frac{\Gamma(d_{\mathcal{U}} + 1/2)}{\Gamma(d_{\mathcal{U}} - 1)\Gamma(2d_{\mathcal{U}})} \quad (159)$$

1.2 Interpretação Física

Uma unpartícula com dimensão $d_{\mathcal{U}}$ se comporta como $d_{\mathcal{U}}$ partículas sem massa invisíveis (mas com $d_{\mathcal{U}}$ não-inteiro!). A fase space de n partículas sem massa escala como $(P^2)^{n-2}$, logo a unpartícula com expoente $d_{\mathcal{U}} - 2$ mimetiza " $d_{\mathcal{U}}$ partículas fracionárias".

Para $d_{\mathcal{U}} = 1$: partícula sem massa ordinária. Para $d_{\mathcal{U}} = 2$: como dois grávitons/fótons virtuais. Para $d_{\mathcal{U}}$ não-inteiro: algo genuinamente novo — "matéria conforme".

2 Espectro de Massa e Decomposição Espectral

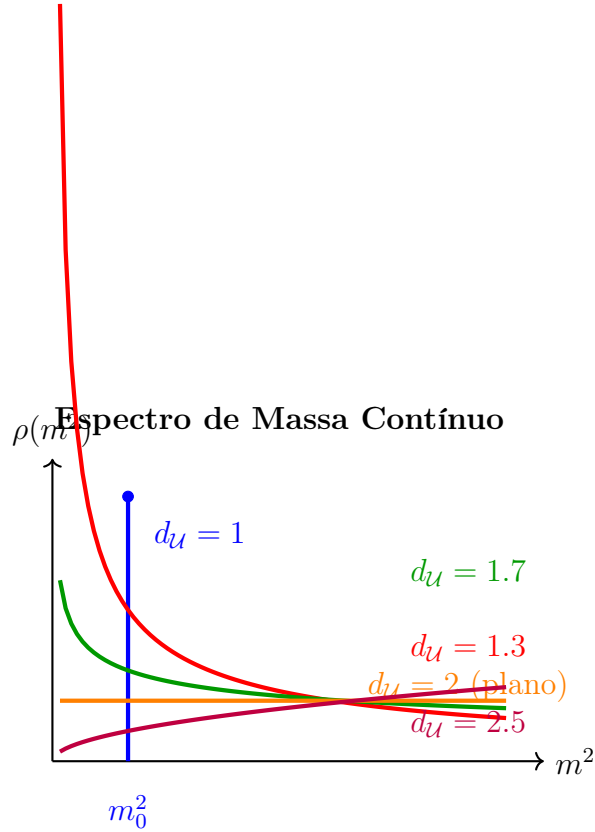
2.1 Representação de Källén-Lehmann

O propagador de Feynman da unpartícula escalar via Källén-Lehmann:

$$\Delta_{\mathcal{U}}(p^2) = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_{\mathcal{U}}(\mu^2)}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (160)$$

com $\rho_{\mathcal{U}}(\mu^2) = A_{d_{\mathcal{U}}} \theta(\mu^2) (\mu^2)^{d_{\mathcal{U}}-2}$.

Interpretação: A unpartícula é uma **superposição contínua de partículas de todas as massas**, com peso $(m^2)^{d_{\mathcal{U}}-2}$.



2.2 Propagador Escalar

$$\Delta_{\mathcal{U}}(P^2) = \frac{A_{d_{\mathcal{U}}}}{2 \sin(d_{\mathcal{U}}\pi)} \frac{i}{(-P^2 - i\epsilon)^{2-d_{\mathcal{U}}}} \quad (161)$$

- Para $d_{\mathcal{U}} = 1$: $\Delta \propto i/P^2$ (propagador de partícula sem massa). ✓

- Para $d_{\mathcal{U}}$ não-inteiro: o propagador tem um **corte de ramo** em vez de pólo — não há "partícula on-shell" definida.

2.3 Propagadores Vetorial e Tensorial

Unpartícula vetorial ($J_{\mu}^{\mathcal{U}}$):

$$\Delta_{\mathcal{U}}^{\mu\nu}(p) = \frac{A_{d_{\mathcal{U}}}}{2 \sin(d_{\mathcal{U}}\pi)} \frac{-g^{\mu\nu} + p^{\mu}p^{\nu}/p^2}{(-p^2)^{2-d_{\mathcal{U}}}} \quad (162)$$

Unpartícula tensorial ($T_{\mu\nu}^{\mathcal{U}}$):

$$\Delta_{\mathcal{U}}^{\mu\nu,\rho\sigma}(p) = \frac{A_{d_{\mathcal{U}}}}{2 \sin(d_{\mathcal{U}}\pi)} \frac{\Pi^{\mu\nu,\rho\sigma}(p)}{(-p^2)^{2-d_{\mathcal{U}}}} \quad (163)$$

onde $\Pi^{\mu\nu,\rho\sigma}$ é o projetor transverso traceless de spin-2.

3 Operadores de Criação e Aniquilação

3.1 Quantização do Setor Conforme

Em quantização radial, o "vácuo" $|0\rangle$ é aniquilado por K_{μ} . Os estados de unpartícula são criados aplicando o operador primário $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ de dimensão $d_{\mathcal{U}}$:

$$|\mathcal{U}(\mathbf{p})\rangle = \int d^d x e^{ip \cdot x} \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(x) |0\rangle \quad (164)$$

3.2 Operador de Campo da Unpartícula

$$\hat{\Phi}_{\mathcal{U}}(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2)^{1/2} [\hat{a}(p, \mu^2) e^{-ip \cdot x} \delta(p^2 - \mu^2) \theta(p^0) + \text{h.c.}] \quad (165)$$

com relações de comutação:

$$[\hat{a}(p, \mu^2), \hat{a}^{\dagger}(p', \mu'^2)] = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\mu^2 - \mu'^2) \quad (166)$$

3.3 Espaço de Fock

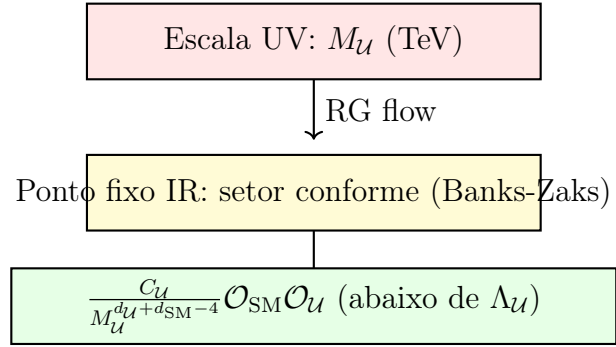
O espaço de Fock é contínuo no parâmetro de massa:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \bigoplus_{\mu^2 \geq 0} \mathcal{F}(\mu^2) \quad (167)$$

O número de partícula não é bom número quântico no setor conforme. O que é bem definido é o **operador de dimensão** $\hat{D}$ que conta a dimensão de escalonamento total.

4 Acoplamento ao Modelo Padrão

4.1 Estrutura de Energia e RG Flow



Acima de $M_{\mathcal{U}}$, o setor oculto interage via operadores de dimensão alta:

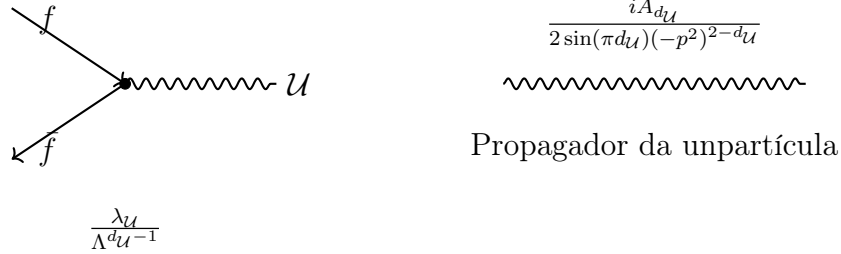
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{M_{\mathcal{U}}^{d_{\text{UV}}+d_{\text{SM}}-4}} \mathcal{O}_{\text{SM}} \mathcal{O}_{\text{UV}} \quad (168)$$

Abaixo de $\Lambda_{\mathcal{U}}$ (ponto fixo conforme):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{C_{\mathcal{U}} \Lambda_{\mathcal{U}}^{d_{\text{UV}}-d_{\mathcal{U}}}}{M_{\mathcal{U}}^{d_{\text{UV}}+d_{\text{SM}}-4}} \mathcal{O}_{\text{SM}} \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \quad (169)$$

5 Regras de Feynman e Fenomenologia

5.1 Vértices e Propagador



5.2 Tipos de Acoplamento

Tipo de $\mathcal{O}_U$	Acoplamento	Processo
Escalar (d_U)	$\bar{f}f \mathcal{O}_U$	Produção invisível em colisores
Vetorial (d_U)	$\bar{f}\gamma^\mu f \mathcal{O}_{U\mu}$	Interferência com γ/Z
Tensorial (d_U)	$T_{\mu\nu}^{\text{SM}} \mathcal{O}_U^{\mu\nu}$	Efeitos gravitacionais efetivos

5.3 Seção de Choque $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ com Unpartícula

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z + \mathcal{M}_U \quad (170)$$

$$\mathcal{M}_U = \frac{\lambda_e \lambda_\mu}{\Lambda^{2(d_U-1)}} \frac{A_{d_U}}{2\sin(\pi d_U)} \frac{(\bar{v}\gamma^\mu u)(\bar{u}'\gamma_\mu v')}{(-s)^{2-d_U}} \quad (171)$$

A fase complexa $(-s)^{d_U-2} = |s|^{d_U-2} e^{-i\pi(d_U-2)}$ produz padrões de interferência distintos com γ/Z .

5.4 Assinaturas Experimentais

1. Energia faltante com espectro contínuo ($e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{invisível}$):

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} \propto E_\gamma^{2d_U-3} \quad (172)$$

2. Violação de escala na seção de choque:

$$\sigma \propto s^{d_U-2} \quad (173)$$

3. Limites experimentais (LHC):

- $M_U/C_U^{1/(d_U+d_{SM}-4)} \gtrsim 1\text{-}10 \text{ TeV}$.
- $d_U \approx 1$ é mais restrito (parece partícula sem massa).
- $d_U > 2$ é menos restrito (suprimido por potências de energia).

6 Gap Conforme e Quebra de Simetria

Se a simetria conforme é levemente quebrada, a unpartícula adquire um "gap":

$$\rho_U(P^2) = A_{d_U} \theta(P^2 - \mu^2) (P^2 - \mu^2)^{d_U-2} \quad (174)$$

O gap μ introduz uma escala de massa efetiva — a unpartícula se torna uma "partícula gorda" (ressonância larga) em vez de um contínuo puro.

Parte IX

Relatividade Geral, Formalismo de Cartan e Simetria Conforme

1 Gravitação de Cartan (Formalismo de Primeira Ordem)

1.1 Variáveis de Cartan

Em vez da métrica $g_{\mu\nu}$, usamos:

- **Tetrad** (vierbein) e_μ^a : $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$

- **Conexão de spin** ω_μ^{ab} : conexão de Lorentz local $SO(1,3)$

As variáveis são 1-formas: $e^a = e_\mu^a dx^\mu$, $\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab} dx^\mu$.

1.2 Equações de Estrutura de Cartan

Primeira equação (torção):

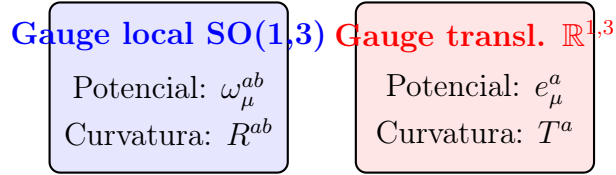
$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b \quad (175)$$

Segunda equação (curvatura):

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} \quad (176)$$

Na Relatividade Geral padrão: $T^a = 0$ (condição de torção nula determina ω em função de e).

Estrutura de Gauge da Gravitação



Juntas: Teoria Gauge do grupo de Poincaré $ISO(1,3)$

1.3 Ação de Palatini

Ação de Einstein em formalismo de primeira ordem:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \quad (177)$$

Variando independentemente:

- $\delta\omega$: dá $T^a = 0$ (determina $\omega = \omega(e)$, conexão de Levi-Civita).
- δe : dá as equações de Einstein $G_{\mu\nu} = 0$.

2 Gravitação Conforme de Weyl

2.1 Gauge Conforme: Grupo SO(2,4) Local

Formulação da gravitação como teoria gauge do **grupo conforme local**:

Gerador	Potencial de gauge	Campo de força
P_a (translações)	e_μ^a (tetrad)	Torção T^a
M_{ab} (Lorentz)	ω_μ^{ab} (conexão de spin)	Curvatura R^{ab}
D (dilatação)	b_μ (campo de Weyl)	$F_{\mu\nu}^{(D)}$
K_a (SCT)	f_μ^a (campo conforme)	$R^a(K)$

2.2 Gravitação de Weyl Quadrática

A ação invariante conforme mais natural em 4D:

$$S_{\text{Weyl}} = -\alpha_W \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (178)$$

Propriedades:

- Invariante sob transformações conformes locais.
- 4ª ordem nas derivadas da métrica (propagador $\sim 1/k^4$).
- Renormalizável (mas não-unitária — possui "fantasmas").

2.3 Tensor de Bach

O tensor de Bach é a "equação de movimento" da gravitação de Weyl:

$$B_{\mu\nu} = \nabla^\rho \nabla^\sigma C_{\mu\rho\nu\sigma} + \frac{1}{2} R^{\rho\sigma} C_{\mu\rho\nu\sigma} \quad (179)$$

$B_{\mu\nu}$ é simétrico, traceless e invariante conforme de peso -2 . $B_{\mu\nu} = 0$ são as equações de campo.

2.4 Gauss-Bonnet e Topologia

O invariante topológico de Euler em 4D:

$$\chi = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{-g} E_4 = \frac{1}{32\pi^2} \int (R^{ab} \wedge R^{cd}) \epsilon_{abcd} \quad (180)$$

é invariante conforme e contribui para a anomalia de traço.

3 Conexão de Cartan Conforme Aplicada à Gravitação

3.1 Fibrado de Tractor Conforme

O **fibrado de tractor** é o fibrado vetorial associado à representação fundamental de $SO(2,4)$ sobre a variedade M^d . Uma seção (**tractor**) decompõe-se em:

$$V^A = \begin{pmatrix} \sigma \\ v^a \\ \rho \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathcal{T}M) \quad (181)$$

onde σ e ρ são densidades de peso conforme $+1$ e -1 respectivamente, e v^a é um vetor tangente de peso 0 .

A métrica do tractor é herdada da métrica ambiente $\mathbb{R}^{2,4}$:

$$\langle V, W \rangle_{\mathcal{T}} = \eta_{ab} v^a w^b + \sigma \tau + \rho \omega \quad (182)$$

para $V = (\sigma, v^a, \rho)$ e $W = (\omega, w^a, \tau)$.

3.2 Derivada de Tractor (Conexão de Tractor)

A **derivada de tractor** $\nabla_{\mu}^{\mathcal{T}}$ é a conexão canônica no fibrado de tractor:

$$\nabla_{\mu}^{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} \sigma \\ v^a \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mu} \sigma - b_{\mu} \sigma - v_{\mu} \\ \nabla_{\mu} v^a + b_{\mu} v^a + \sigma f_{\mu}^a - \rho e_{\mu}^a \\ \nabla_{\mu} \rho + b_{\mu} \rho + f_{a\mu} v^a \end{pmatrix} \quad (183)$$

Com as fixações de gauge $b_\mu = 0$ e $f_\mu^a = P_\mu^a$ (tensor de Schouten), isto se reduz a:

$$\nabla_\mu^\mathcal{T} \begin{pmatrix} \sigma \\ v^a \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_\mu \sigma - v_\mu \\ \nabla_\mu v^a + \sigma P_\mu^a - \rho e_\mu^a \\ \nabla_\mu \rho + P_{a\mu} v^a \end{pmatrix} \quad (184)$$

3.3 Curvatura do Tractor

A curvatura da conexão de tractor $\Omega_{\mu\nu}^\mathcal{T} = [\nabla_\mu^\mathcal{T}, \nabla_\nu^\mathcal{T}]$ tem a forma:

$$\Omega_{\mu\nu}^\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{b\mu\nu}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{b\mu\nu} & 0 \end{pmatrix} \quad (185)$$

onde $C_{b\mu\nu}^a$ é o tensor de Weyl e $\mathcal{C}_{b\mu\nu}$ é o tensor de Cotton. Portanto:

- A curvatura do tractor é **nula** $\Leftrightarrow$ Weyl = 0 e Cotton = 0 $\Leftrightarrow$ espaço conformalmente plano.
- Em $d \geq 4$: basta Weyl = 0 (Cotton é derivada do Weyl pela identidade de Bianchi).
- Em $d = 3$: Weyl $\equiv 0$, a obstrução é apenas o Cotton.

3.4 Equações de Estrutura com Todas as Curvaturas

Resumindo as curvaturas do gauge conforme SO(2,4) (detalhadas na Part II), em notação compacta:

$$\boxed{\begin{aligned} T^a &= De^a - b \wedge e^a = 0 \quad (\text{imposta}) \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega_c^a \wedge \omega^{cb} - 4e^{[a} \wedge f^{b]} \\ F(D) &= db + 2e^a \wedge f_a = 0 \quad (\text{imposta}) \\ R^a(K) &= Df^a + b \wedge f^a \end{aligned}} \quad (186)$$

Com as condições $T^a = 0$ e $F(D) = 0$ impostas, restam:

$$R^{ab}|_{\text{residual}} = R_{\text{Riem}}^{ab} - 4e^{[a} P_{c}^{b]} \wedge e^c = C^{ab} \quad (\text{tensor de Weyl!}) \quad (187)$$

$$R^a(K)|_{\text{residual}} = \nabla_{[b} P_{c]}^a e^b \wedge e^c = \frac{1}{2} \mathcal{C}_{bc}^a e^b \wedge e^c \quad (\text{Cotton!}) \quad (188)$$

3.5 Identidades de Bianchi na Formulação de Gauge

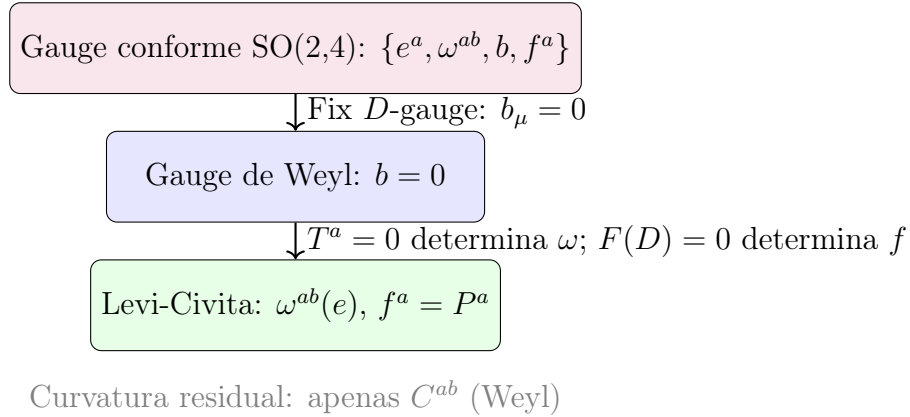
Pela identidade de Bianchi generalizada $D\Omega = 0$ (onde D é a derivada exterior covariante do gauge conforme):

$$\boxed{\begin{aligned} DC^{ab} &= 2e^{[a} \wedge R^{b]}(K) = e^{[a} \wedge \mathcal{C}^{b]}_{cd} e^c \wedge e^d \\ DR^a(K) &= C^a_b \wedge f^b = C^a_b \wedge P^b_c e^c \end{aligned}} \quad (189)$$

A primeira equação é equivalente à identidade de Bianchi conforme $\nabla^\mu C_{\mu\nu\rho\sigma} = (d-3)\mathcal{C}_{\nu\rho\sigma}$ em linguagem de formas diferenciais.

3.6 Recuperando a Conexão de Levi-Civita

O procedimento completo de fixação de gauge conforme:



4 Supergravidade Conforme

4.1 Construção de Kaku-Townsend-van Nieuwenhuizen

A **supergravidade conforme** gauges o grupo superconforme $SU(2, 2|1)$ (para $\mathcal{N} = 1$). Os campos gauge são:

$$\{e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}, b_\mu, f_\mu^a, \psi_\mu, \phi_\mu, A_\mu\} \quad (190)$$

Fixando gauges (K_a , D , S -supersimetria) e eliminando campos auxiliares, obtém-se a supergravidade de Poincaré usual — mas a construção conforme é mais sistemática

para acoplamentos a matéria.

Parte X

Buracos Negros e Simetria Conforme

1 Buracos Negros em AdS e Termodinâmica

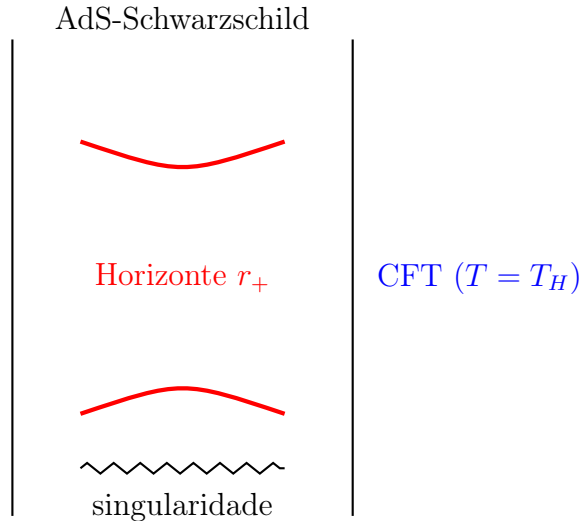
1.1 Buraco Negro de Schwarzschild-AdS

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad f(r) = 1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{\omega_d M}{r^{d-2}} \quad (191)$$

Temperatura de Hawking:

$$T_H = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi r_+} \left[(d-2) + \frac{dr_+^2}{L^2} \right] \quad (192)$$

Dicionário holográfico: Este buraco negro é dual a um estado térmico na CFT à temperatura T_H .



1.2 Entropia de Bekenstein-Hawking

$$S_{\text{BH}} = \frac{A_{\text{horizonte}}}{4G_N} = \frac{\text{Vol}(S^{d-1}) r_+^{d-1}}{4G_N} \quad (193)$$

Via AdS/CFT, esta entropia conta os **micro-estados da CFT**:

$$S_{\text{CFT}}(T) = \frac{2\pi^2}{3} c_{\text{eff}} T^3 V \quad (d=4) \quad (194)$$

onde $c_{\text{eff}} \propto N^2$.

2 Simetria Conforme em Horizontes

2.1 Dualidade Kerr/CFT

Perto do horizonte de um buraco negro de Kerr extremo ($T_H = 0$, $J = M^2$), a geometria é $\text{AdS}_2 \times S^2$. O grupo de isometrias $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{U}(1)$ sugere uma CFT_2 dual com carga central:

$$c = 12J \quad (195)$$

A fórmula de Cardy reproduz a entropia:

$$S = \frac{\pi^2}{3} c T_L = 2\pi J = \frac{A}{4G} \quad \checkmark \quad (196)$$

2.2 Simetria BMS

A simetria assintótica em horizontes genéricos é o grupo BMS — extensão infinito-dimensional do grupo de Poincaré:

$$\text{BMS} = \text{Supertranslações} \rtimes \text{Lorentz} \quad (197)$$

A álgebra BMS perto do horizonte contém uma subálgebra de Virasoro, sugerindo uma CFT_2 universal nos graus de liberdade do horizonte.

3 Informação e Unitariedade

3.1 Paradoxo da Informação

A radiação de Hawking parece **térmica pura**. Mas a CFT dual é unitária! Resolução:

- A evolução na CFT é unitária $\Rightarrow$ informação não se perde.
- A "perda" é artefato da aproximação semiclássica no bulk.
- As "ilhas" de entropia fornecem o mecanismo concreto.

3.2 Firewalls e ER=EPR

O argumento AMPS: unitariedade + monogamia do emaranhamento parecem exigir um "firewall". Resoluções:

- ER=EPR (Maldacena-Susskind): Emaranhamento = pontes de Einstein-Rosen.
- Complexidade computacional: decodificação requer tempo exponencial.
- Ilhas e Page curve: a fórmula QES resolve sem firewalls.

Parte XI

Correspondência AdS/CFT

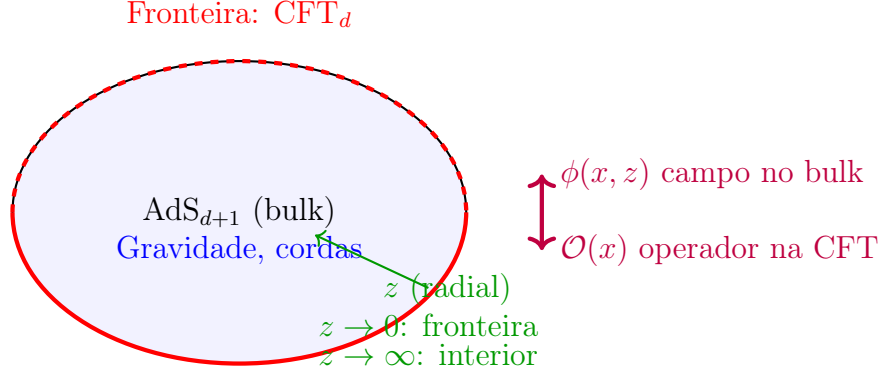
1 A Dualidade Gauge/Gravidade

1.1 Formulação de Maldacena (1997)

$$\boxed{\text{Gravidade quântica em AdS}_{d+1} \longleftrightarrow \text{CFT}_d \text{ na fronteira}} \quad (198)$$

O exemplo canônico:

$$\text{Supercordas IIB em } \text{AdS}_5 \times S^5 \longleftrightarrow \mathcal{N} = 4 \text{ SYM com gauge } \text{SU}(N) \quad (199)$$



1.2 O Espaço Anti-de Sitter

Em coordenadas de Poincaré:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2), \quad z > 0 \quad (200)$$

Simetria crucial: O grupo de isometrias de AdS_{d+1} é exatamente $\text{SO}(2, d)$ — o grupo conforme em d dimensões!

1.3 Dicionário AdS/CFT

Gravidade (bulk AdS)	CFT (fronteira)
Campo escalar $\phi(x, z)$ de massa m	Operador $\mathcal{O}$ de dimensão Δ
Campo de gauge $A_\mu(x, z)$	Corrente conservada J_μ
Métrica $g_{\mu\nu}(x, z)$	Tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$
Constante de Newton G_N	$1/N^2$ (planar)
Raio de AdS L	Acoplamento de 't Hooft $\lambda = g^2 N$
Profundidade z	Escala de energia $\mu \sim 1/z$
Horizonte de buraco negro	Estado térmico (temperatura T)
Geodésica no bulk	Entropia de emaranhamento (Ryu-Takayanagi)

Tabela 3: Dicionário AdS/CFT.

1.4 Relação Massa-Dimensão

Para um campo escalar de massa m no AdS_{d+1} :

$$\boxed{\Delta(\Delta - d) = m^2 L^2} \quad (201)$$

As duas soluções: $\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2}$.

Para campos de spin s :

$$\begin{aligned} \text{Escalar: } \Delta(\Delta - d) &= m^2 L^2 \\ \text{Spinor: } \Delta &= \frac{d}{2} + |m|L \\ \text{Vetor (p-forma): } \Delta(\Delta - d) &= m^2 L^2 + p(d - p) \\ \text{Graviton (sem massa): } \Delta &= d \end{aligned} \quad (202)$$

2 Fórmula GKPW

A relação fundamental (Gubser-Klebanov-Polyakov / Witten):

$$\boxed{Z_{\text{grav}}[\phi_0] = \left\langle \exp \left(\int d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}(x) \right) \right\rangle_{\text{CFT}}} \quad (203)$$

No limite semiclássico ($N \rightarrow \infty$, λ grande):

$$Z_{\text{grav}} \approx e^{-S_{\text{on-shell}}[\phi_{\text{cl}}]} \quad (204)$$

Correladores:

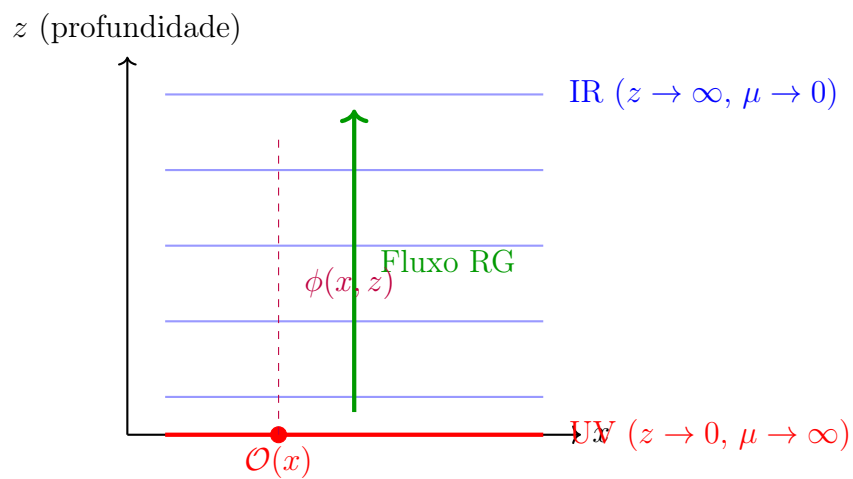
$$\langle \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^n S_{\text{on-shell}}}{\delta \phi_0(x_1) \cdots \delta \phi_0(x_n)} \quad (205)$$

3 Holografia e o Grupo Conforme

3.1 Isometrias do AdS = Simetria Conforme

O espaço AdS_{d+1} é o espaço homogêneo:

$$\text{AdS}_{d+1} = \frac{\text{SO}(2, d)}{\text{SO}(1, d)} \quad (206)$$

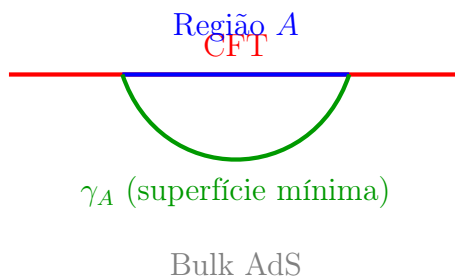


3.2 Entropia de Emaranhamento (Ryu-Takayanagi)

Para uma região A na CFT:

$$S_A = \frac{\text{Área}(\gamma_A)}{4G_N} \quad (207)$$

onde γ_A é a superfície mínima no bulk ancorada em ∂A .



Parte XII

Bootstrap Conforme

1 A Filosofia do Bootstrap

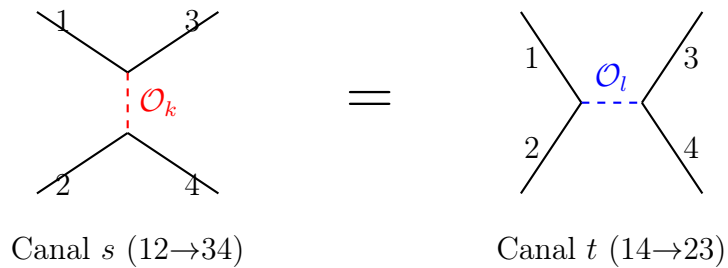
1.1 Dados da CFT

Uma CFT é completamente determinada por:

1. O **espectro** de operadores primários: $\{(\Delta_i, l_i)\}$.
2. Os **coeficientes da OPE**: $\{C_{ijk}\}$.

O bootstrap busca determinar esses dados usando apenas **consistência interna** — sem lagrangiana!

1.2 Crossing Symmetry



A equação de bootstrap:

$$\boxed{\sum_{\Delta, l} p_{\Delta, l} F_{\Delta, l}(u, v) = 0} \quad (208)$$

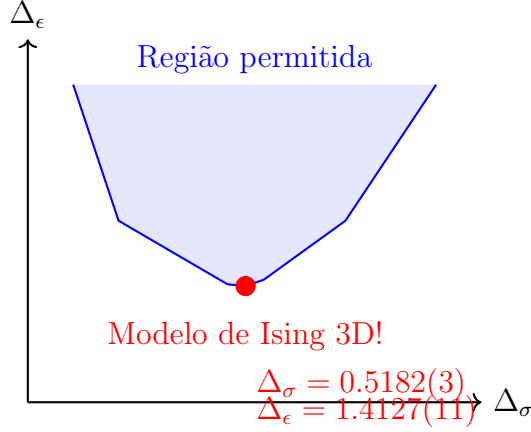
onde $p_{\Delta,l} = |C_{\phi\phi\mathcal{O}}|^2 \geq 0$ e $F_{\Delta,l}$ são combinações de blocos conformes cruzados.

2 Bootstrap Numérico

2.1 Método de Exclusão (SDP)

Usa-se programação semidefinida para encontrar funcionais lineares α que satisfazem: $\alpha[F_{\text{id}}] > 0$ e $\alpha[F_{\Delta,l}] \geq 0$ para todo espectro permitido. Se tal funcional existe, o espectro é inconsistente.

2.2 Modelo de Ising 3D



Os expoentes críticos:

$$\nu = \frac{1}{d - \Delta_\epsilon} = 0.6300(4), \quad \eta = 2\Delta_\sigma - (d - 2) = 0.0364(5) \quad (209)$$

3 Superconforme Bootstrap

Para teorias com supersimetria $\mathcal{N}$:

d	Grupo Superconforme	SUSY
3	$\text{OSp}(\mathcal{N} 4)$	$\mathcal{N} = 1, 2, \dots, 8$
4	$\text{SU}(2, 2 \mathcal{N})$	$\mathcal{N} = 1, 2, 3, 4$
6	$\text{OSp}(8^* 2\mathcal{N})$	$\mathcal{N} = (1, 0), (2, 0)$

O superconforme bootstrap é mais poderoso porque a SUSY impõe relações entre

operadores (shortening conditions).

Parte XIII

$\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills e a CFT Canônica

1 A Teoria

1.1 Conteúdo de Campo

$\mathcal{N} = 4$ SYM em $d = 4$ com gauge $SU(N)$:

- 1 campo de gauge A_μ
- 6 escalares reais Φ^I ($I = 1, \dots, 6$) na **6** de $SU(4)_R$
- 4 férmions de Weyl λ_α^A ($A = 1, \dots, 4$) na **4**

Todos na adjunta de $SU(N)$. Lagrangiana:

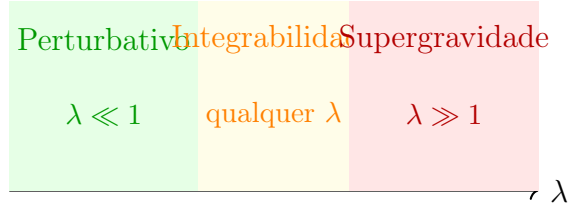
$$\mathcal{L} = \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} (D_\mu \Phi^I)^2 + \frac{g^2}{4} [\Phi^I, \Phi^J]^2 + i \bar{\lambda} \not{D} \lambda + g \lambda [\Phi, \lambda] + \text{h.c.} \right] \quad (210)$$

1.2 Propriedades Especiais

- $\beta(g) = 0$ exatamente $\rightarrow$ CFT para qualquer acoplamento.
- Simetria $SU(2, 2|4)$ superconforme (32 supercargas).
- Dualidade S: $g \rightarrow 1/g$ (Montonen-Olive).
- Integrabilidade no limite planar ($N \rightarrow \infty$).
- Dual holográfico: Supercordas IIB em $\text{AdS}_5 \times S^5$.

1.3 Mapa de Parâmetros

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda &= g_{\text{YM}}^2 N \quad (\text{acoplamento de 't Hooft}) \\ \frac{L^4}{l_s^4} &= \lambda, \quad \frac{L^4}{l_P^4} = N \end{aligned}} \quad (211)$$



2 Operadores BPS e Integrabilidade

Operadores em **multipletos BPS curtos** têm dimensão protegida. Exemplo: $\text{Tr}(\Phi^I \Phi^J)$ tem $\Delta = 2$ exatamente.

O operador de Konishi $K = \text{Tr}(\Phi^I \Phi^I)$ não é protegido:

$$\Delta_K = 2 + \gamma_K(g), \quad \gamma_K = \frac{3g^2 N}{4\pi^2} - \frac{3g^4 N^2}{16\pi^4} + \dots \quad (212)$$

No limite planar, a dilatação é mapeada para uma cadeia de spin integrável (Bethe Ansatz):

$$\left(\frac{u_k + i/2}{u_k - i/2} \right)^L = \prod_{j \neq k} \frac{u_k - u_j + i}{u_k - u_j - i} \quad (213)$$

Parte XIV

Teorias Conformes em Diversas Dimensões

1 CFT em $d = 2$ (Álgebra de Virasoro)

Em $d = 2$, o grupo conforme é **infinito-dimensional**:

$$\boxed{[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}} \quad (214)$$

A carga central c caracteriza a CFT 2D ($c = 1/2$ para Ising 2D, $c = 1$ para bóson livre).

Em $d \geq 3$, apenas o subgrupo global $\{L_{-1}, L_0, L_1\} \otimes \{\bar{L}_{-1}, \bar{L}_0, \bar{L}_1\} \cong \text{SO}(2, d)$ sobrevive.

2 CFT em $d = 3$

- **Modelo de Ising 3D:** $\Delta_\sigma = 0.5182$, $\Delta_\epsilon = 1.4127$.
- **Modelo $O(N)$:** Para $N = 2$ (XY): $\nu = 0.6717$.
- **QED₃:** Relevante para spin liquids.
- **Chern-Simons-Matter:** $U(N)_k$ — dualidade Bose-Fermi:

$$U(N)_k + N_f \text{ férmions} \longleftrightarrow U(k)_{-N} + N_f \text{ bósons} \quad (215)$$

3 CFT em $d = 6$

Existem CFTs superconformes sem descrição lagrangiana:

- **Teoria** $(2, 0)$ **tipo** A_{N-1} : N M5-branes em M-theory. Graus de liberdade $\sim N^3$.
- Contém tensores auto-duais $B_{\mu\nu}^+$ sem ação clássica.

4 CFT em $d = 5$

Existem CFTs 5D não-triviais (apesar de teorias de gauge 5D serem não-renormalizáveis):

- Teoria de Seiberg E_N : UV completion de SYM 5D com $N_f \leq 7$ sabores.
- Ponto fixo $\text{USp}(2N)$ com matéria fundamental e antissimétrica.

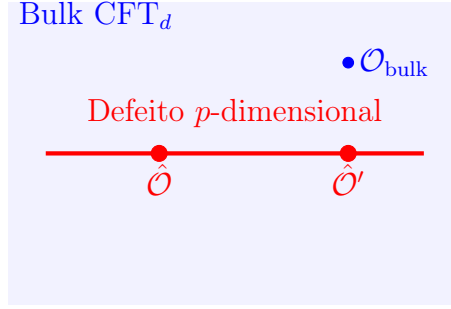
Parte XV

Defects, Boundaries e Extended Operators

1 CFT com Defeitos

Um **defeito conforme** p -dimensional quebra parcialmente a simetria:

$$\text{SO}(2, d) \rightarrow \text{SO}(2, p) \times \text{SO}(d - p) \quad (216)$$



Exemplos:

- $p = 0$: Operador local.
- $p = 1$: Loop de Wilson, 't Hooft line.
- $p = 2$: Operador de superfície.
- $p = d - 1$: BCFT (Boundary CFT).

1.1 OPE Bulk-to-Defect

$$\mathcal{O}(x_{\parallel}, x_{\perp}) \xrightarrow{x_{\perp} \rightarrow 0} \sum_k \frac{b_{\mathcal{O}k}}{|x_{\perp}|^{\Delta_{\mathcal{O}} - \hat{\Delta}_k}} \hat{\mathcal{O}}_k(x_{\parallel}) \quad (217)$$

2 Boundary CFT (BCFT)

Com fronteira ($p = d - 1$), o correlador de 1 ponto:

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\text{BCFT}} = \frac{a_{\mathcal{O}}}{(2x_{\perp})^{\Delta}} \quad (218)$$

O correlador de 2 pontos depende da razão cruzada $\xi = \frac{x_{12}^2}{4x_{1\perp}x_{2\perp}}$ que mede o quanto

o correlator "sente" a fronteira.

Parte XVI

Aplicações em Física da Matéria Condensada

1 Transições de Fase e Pontos Críticos

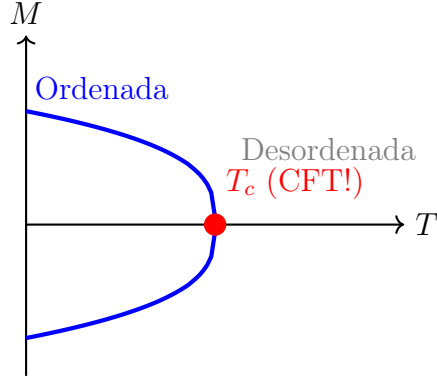
1.1 Universalidade e CFT

Perto de um ponto crítico, $\xi \rightarrow \infty$ e o sistema se torna invariante conforme:

$$\text{Invariância de escala} + \text{Unitariedade} + \text{Rotação} \implies \text{Invariância conforme} \quad (219)$$

1.2 Expoentes Críticos como Dimensões Conformes

Expoente	Relação com Δ	Significado
ν	$1/(d - \Delta_\epsilon)$	Comprimento de correlação
η	$2\Delta_\sigma - (d - 2)$	Decaimento do correlator
α	$2 - d\nu$	Calor específico
β	$\nu\Delta_\sigma/(d - \Delta_\epsilon)$	Magnetização



2 Pontos Críticos Quânticos

Em transições de fase quânticas ($T = 0$):

Ponto crítico quântico em d dimensões = CFT em $d + 1$ dimensões euclidianas (220)

No regime quântico-crítico:

$$\sigma(\omega, T) = T^{(d-2)/z} \Phi \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) \quad (221)$$

3 Aplicação via AdS/CFT

3.1 Viscosidade/Entropia (Bound KSS)

$$\boxed{\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \frac{\hbar}{k_B}} \quad (222)$$

Este valor universal é saturado pelo plasma de quarks-glúons (QGP) no RHIC/LHC.

3.2 Condutividade Óptica

Para CFT em $d = 2 + 1$ a temperatura T :

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2}{\hbar} \Sigma \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) \quad (223)$$

Aplicação: grafeno no ponto de neutralidade de carga.

Parte XVII

Fronteiras Modernas e Desenvolvimentos Recentes

1 Amplitudes de Espalhamento e Simetria Conforme

1.1 Dual Conformal Symmetry

Em $\mathcal{N} = 4$ SYM, as amplitudes de espalhamento possuem uma simetria conforme **dual** — no espaço de momentos duais x_i^μ ($p_i = x_i - x_{i+1}$):

$$\text{Amplitudes} = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{com simetria conforme em } x_i! \quad (224)$$

A combinação da simetria conforme ordinária com a dual gera a **simetria de Yangian** $Y[\mathfrak{psu}(2, 2|4)]$ — uma álgebra quântica infinito-dimensional.

1.2 Amplituhedron

Arkani-Hamed e Trnka (2013) mostraram que amplitudes em $\mathcal{N} = 4$ SYM são volumes de um politopo no "espaço de Grassmannianas amplificado":

$$\mathcal{A}_n^{(k)} = \text{Vol}(\text{Amplituhedron}_{n,k}) \quad (225)$$

Localidade e unitariedade emergem da geometria, em vez de serem impostas.

2 Entropia de Emaranhamento e Informação Quântica

2.1 Fórmula de Cardy para Entropia

Em uma CFT 2D no vácuo, a entropia de emaranhamento de um intervalo de comprimento ℓ :

$$S_A = \frac{c}{3} \ln \frac{\ell}{\epsilon} \quad (226)$$

onde c é a carga central e ϵ o cutoff UV. Em CFT d -dimensional geral:

$$S_A = c_1 \frac{\text{Área}(\partial A)}{\epsilon^{d-2}} + \dots + (-1)^{d/2} a_d^* \ln \frac{L}{\epsilon} + \dots \quad (227)$$

O coeficiente universal a_d^* está relacionado à anomalia conforme.

2.2 Complexidade Holográfica

A complexidade computacional do estado dual é conjecturada como:

$$\mathcal{C} = \frac{V(\text{maximal slice})}{G_N L} \quad (\text{Conjectura "Complexity = Volume"}) \quad (228)$$

ou

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\text{WDW}}}{\pi \hbar} \quad (\text{Conjectura "Complexity = Action"}) \quad (229)$$

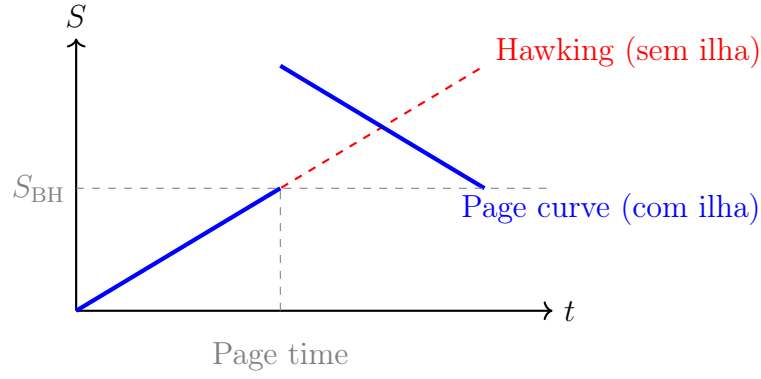
3 Ilhas de Entropia e o Paradoxo da Informação

3.1 Fórmula da Ilha

Para buracos negros evaporando em contato com um banho (CFT):

$$S(R) = \min \left\{ \text{ext} \left[\frac{\text{Área}(\partial I)}{4G_N} + S_{\text{bulk}}(R \cup I) \right] \right\} \quad (230)$$

A "ilha" I é uma região dentro do buraco negro que contribui para a entropia da radiação R . Após o "Page time", a ilha domina e a entropia decresce — resolvendo o paradoxo da informação!



4 Simetrias Generalizadas

4.1 Simetrias de Forma Superior (p -form)

Simetrias generalizadas atuam sobre objetos estendidos (p -dimensionais) em vez de pontos:

$$U_g(\Sigma^{d-p-1}) W(\gamma^p) = e^{i\alpha} W(\gamma^p) \quad \text{quando } \Sigma \text{ enlaça } \gamma \quad (231)$$

- **0-form:** Simetria ordinária (atua sobre partículas/operadores locais).
- **1-form:** Atua sobre linhas (ex: centro $\mathbb{Z}_N$ de $SU(N)$ atua sobre loops de Wilson).
- **$(d-2)$ -form:** Atua sobre co-dimensão 2 (monopolos magnéticos).

4.2 Non-Invertible Symmetries

Desenvolvimento recente (2022+): simetrias cujos operadores topológicos não são invertíveis:

$$\mathcal{N} \times \mathcal{N}^\dagger \neq 1 \quad (\text{não-invertível!}) \quad (232)$$

Em vez de grupo, formam uma **categoria de fusão**. Impõem restrições no espectro e nos acoplamentos da CFT mesmo sem ter inverso.

5 Machine Learning e CFT

5.1 Neural Network Bootstrap

Redes neurais são usadas para:

- Resolver a equação de crossing de forma mais eficiente que programação semidefinida.
- Encontrar bounds mais apertados em espaços de dimensão alta.
- Identificar automaticamente kinks (pontos especiais) na paisagem de CFTs.

5.2 Diffusion Models para Dados da CFT

Modelos generativos podem explorar o espaço de soluções do bootstrap, produzindo famílias de CFTs consistentes como amostras de uma distribuição.

6 Perspectivas

- **Bootstrap analítico:** Expansão de Lorentz inversion formula, dispersão em Regge limit — permite calcular dados da CFT analiticamente em regimes assintóticos.
- **CFT em de Sitter:** Cosmologia inflacionária como CFT euclidiana na fronteira futura (dS/CFT).
- **Holografia plana:** Extensão de AdS/CFT para espaços-tempo assintoticamente planos via amplitudes celestiais.
- **Quantum error correction:** Holografia como código de correção de erros quânticos — subespaço do código = bulk, álgebra de observáveis = fronteira.

Parte XVIII

Relação com Álgebra Geométrica e CGA

1 Grupo Conforme na Álgebra Geométrica

1.1 Grupo Conforme como $\text{Pin}(2,4)$ / $\text{Spin}(2,4)$

Na **Álgebra Geométrica Conforme** (CGA) $\mathcal{Cl}(4,1)$, o grupo conforme emerge naturalmente como o grupo de rotores:

$$\boxed{\text{Spin}(2,4) \subset \mathcal{Cl}^+(4,1) \quad (\text{subálgebra par})} \quad (233)$$

Todas as transformações conformes (translações, rotações, dilatações, SCT) são **rotores** na CGA:

$$X' = R X \tilde{R}, \quad R \tilde{R} = 1 \quad (234)$$

1.2 Mapeamento dos Geradores

Os 15 geradores de $\mathfrak{so}(2,4)$ correspondem aos 15 bivectores de $\mathcal{Cl}(4,1)$:

Gerador conforme	Bivector na CGA	Tipo
Rotações M_{ij}	$e_i \wedge e_j$ ($i, j = 1, 2, 3$)	$B^2 = -1$
Boosts M_{0i}	$e_i \wedge e_0$ (se assinatura Minkowski)	$B^2 = +1$
Translações P_μ	$e_\mu \wedge e_\infty$	$B^2 = 0$ (nilpotente)
SCT K_μ	$e_\mu \wedge e_o$	$B^2 = 0$ (nilpotente)
Dilatação D	$e_o \wedge e_\infty$	$B^2 = +1$

Bivetores da CGA como Geradores Conformes

Rotações/Boosts $e_i \wedge e_j$: rotação 6 bivectores	Dilatação $e_o \wedge e_\infty$ 1 bivector
Translações $e_\mu \wedge e_\infty$ 4 bivectores nilpotentes	SCT $e_\mu \wedge e_o$ 4 bivectores nilpotentes

$$\text{Total: } 6 + 4 + 4 + 1 = 15 = \dim(\mathfrak{so}(2, 4)) \checkmark$$

1.3 Transformações Conformes como Rotores Explícitos

Translação por vetor $\mathbf{a}$:

$$T_{\mathbf{a}} = e^{-\frac{1}{2}e_\infty \mathbf{a}} = 1 - \frac{1}{2}e_\infty \mathbf{a} \quad (235)$$

Dilatação por fator λ :

$$D_\lambda = e^{-\frac{1}{2}(e_o \wedge e_\infty) \ln \lambda} = \sqrt{\lambda} \frac{e_o + \lambda^{-1}e_\infty}{|e_o + e_\infty|} \quad (236)$$

mais simplesmente: $D_\lambda = e^{E \ln \lambda / 2}$ com $E = e_\infty \wedge e_o$.

SCT com parâmetro $\mathbf{b}$:

$$K_{\mathbf{b}} = e^{-\frac{1}{2}e_o \mathbf{b}} = 1 - \frac{1}{2}e_o \mathbf{b} \quad (237)$$

Verificação: $K_{\mathbf{b}} = I \circ T_{\mathbf{b}} \circ I$ onde I é a inversão (reflexão no vetor e_o ou e_∞).

Rotação no plano $e_i e_j$ por ângulo θ :

$$R = e^{-e_i e_j \theta / 2} = \cos(\theta/2) - e_i e_j \sin(\theta/2) \quad (238)$$

1.4 Composição Unificada

Qualquer transformação conforme é um rotor $R \in \text{Spin}(2, 4) \subset \mathcal{Cl}^+(4, 1)$:

$$R = D_\lambda \cdot R_\theta \cdot T_{\mathbf{a}} \cdot K_{\mathbf{b}} = e^{-\frac{1}{2}B} \quad (239)$$

onde B é um bivector geral da CGA. A composição é simplesmente o produto geométrico dos rotores — **sem matrizes!**

2 Álgebra Conforme em Termos de Produtos Geométricos

2.1 Comutadores como Produtos Geométricos

As relações de comutação $[\cdot, \cdot]$ da álgebra de Lie correspondem ao **comutador de bivectores** na GA:

$$[B_1, B_2]_{\text{Lie}} \leftrightarrow B_1 \times B_2 = \frac{1}{2}(B_1 B_2 - B_2 B_1) = \langle B_1 B_2 \rangle_2 \quad (240)$$

(A parte de grau 2 do produto geométrico de dois bivectores.)

Exemplo: $[P_1, K_2]$. Na CGA:

$$(e_1 \wedge e_\infty) \times (e_2 \wedge e_o) = \frac{1}{2}[(e_1 \wedge e_\infty)(e_2 \wedge e_o) - (e_2 \wedge e_o)(e_1 \wedge e_\infty)] \quad (241)$$

$$= \frac{1}{2}[e_1 e_\infty e_2 e_o - e_2 e_o e_1 e_\infty]_{\text{grau } 2} \quad (242)$$

Usando $e_\infty \cdot e_o = -1$ e ortogonalidade dos e_i com e_o, e_∞ :

$$= -(e_1 \wedge e_2) + 0 \cdot D = -M_{12} + \text{contribuição de } D \quad (243)$$

Isto reproduz $[P_\mu, K_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu} D - M_{\mu\nu})$. ✓

3 Spinors Conformes na GA

3.1 Spinor de Dirac em 6D como Twistor

Na álgebra $\mathcal{Cl}(2, 4)$ (ou equivalentemente $\mathcal{Cl}(4, 1)$ via complexificação), um spinor é um elemento da representação spinorial de dimensão $2^3 = 8$ componentes reais = 4 complexas.

Este spinor de 4 componentes complexas é exatamente um **twistor** Z^A !

$$\text{Spinor de Spin}(2, 4) = \text{Fundamental de SU}(2, 2) = \text{Twistor} \quad (244)$$

3.2 Equação de Dirac Conforme na CGA

A equação para um campo conforme na CGA:

$$\nabla_X \Psi = 0 \quad (\text{equação de Dirac no cone nulo de } \mathbb{R}^{2,4}) \quad (245)$$

Projetada no espaço-tempo 4D, isto dá a equação de Dirac sem massa com simetria conforme total.

3.3 Modelo de Partícula Conforme

Uma partícula sem massa no espaço-tempo 4D é descrita por uma geodésica nula. Na CGA, isto é:

$$X(\tau) = e^{-B\tau/2} X_0 e^{B\tau/2} \quad (246)$$

onde B é o bivetor nilpotente da translação ($B = p^\mu e_\mu \wedge e_\infty$ com $p^2 = 0$). A condição de massa zero $p^2 = 0$ é automaticamente $B^2 = 0$ na CGA.

4 Geometria Conforme e Gravitação na CGA

4.1 Conexão de Weyl na CGA

A conexão gauge do grupo conforme pode ser escrita como um bivetor-valorado 1-forma na CGA:

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} (e_a \wedge e_b) dx^\mu + b_\mu (e_o \wedge e_\infty) dx^\mu + e_\mu^a (e_a \wedge e_\infty) dx^\mu + f_\mu^a (e_a \wedge e_o) dx^\mu \quad (247)$$

A curvatura de gauge:

$$R = d\omega + \omega \wedge \omega \quad (248)$$

contém automaticamente todas as curvaturas (Riemann, torção, curvatura de Weyl, curvatura de SCT) em um único objeto da álgebra geométrica.

4.2 Tractor Calculus e GA

O "tractor bundle" da geometria conforme é exatamente o fibrado vetorial associado à representação fundamental de $SO(2,4)$. Na GA, um tractor é um vetor em $\mathbb{R}^{2,4}$:

$$V^A = \sigma e_o + v^\mu e_\mu + \rho e_\infty \quad (249)$$

A conexão de tractor ∇^{tract} coincide com a derivada covariante na CGA. O tensor de Weyl é o campo de curvatura deste fibrado.