

Modelo Padrão da Física de Partículas

Carlos R. de Moraes Filho

04 de maio de 2026

Conteúdo

1	Introdução	17
I	O Modelo Padrão Antes da Quebra de Simetria	19
1	Setor Cinético dos Campos de Gauge	20
1.1	Lagrangiana dos Campos de Gauge	20
1.2	Comutadores da Álgebra de Lie	20
1.3	Grupos de Simetria $SU(3)$, $SU(2)$, e $U(1)$	20
1.4	Campos de Yang-Mills e Auto-interações Não-Abelianas	21
1.5	Transformações de Gauge dos Campos	22
1.5.1	Glúons G_μ^a	22
1.5.2	Bósons $W^\pm, Z, W_\mu^i$	22
1.5.3	Bóson $U(1)_Y B_\mu$	22
1.5.4	Tensor de Força $SU(3)_C G_{\mu\nu}^a$	22
1.5.5	Tensor de Força $SU(2)_L W_{\mu\nu}^i$	23
1.5.6	Tensor de Força $U(1)_Y B_{\mu\nu}$	23
2	Setor dos Campos Férmions	23
2.1	Lagrangiana dos Campos Férmions	23
2.2	Derivada Covariante	23
2.3	Hipercarga, Isospin e Representações	24
2.4	Tabela de Campos Férmions	24
2.5	Matrizes de Pauli, Gell-Mann e Dirac	25
2.5.1	Matrizes de Pauli	25
2.5.2	Matrizes de Gell-Mann	25
2.5.3	Matrizes de Dirac	26
2.6	Quiralidade e Transformação CPT	27
2.6.1	Quiralidade	27

2.7	Transformação CPT	27
2.7.1	Conjugação de Carga (C)	27
2.7.2	Paridade (P)	28
2.7.3	Reversão Temporal (T)	28
2.7.4	Simetria CPT	28
2.8	Transformações de Gauge dos Campos	28
2.8.1	Quarks Esquerdos Q_L	28
2.8.2	Quarks Up Direitos u_R	29
2.8.3	Quarks Down Direitos d_R	29
2.8.4	Léptons Esquerdos L_L	29
2.8.5	Léptons Direitos e_R	30
3	Setor do Campo de Higgs	30
3.1	Lagrangiana do Campo de Higgs	30
3.2	Parâmetros do Campo de Higgs	31
3.3	Transformação de Gauge	31
4	Setor de Interação Yukawa	32
4.1	Lagrangiana de Interação Yukawa	32
4.2	Matrizes de Yukawa	32
4.2.1	Definição	32
4.2.2	Conexão com as Massas	32
4.2.3	Hierarquia e Estrutura	33
4.2.4	Interpretação Física	33
5	Lagrangiana Completa do Modelo Padrão	33
5.1	Componentes da Lagrangiana	34
II	O Modelo Padrão Após a Quebra de Simetria	36
1	Setor Cinético e de Massas dos Campos de Gauge	37

1.1	Lagrangiana dos Campos de Gauge	37
1.2	Tensores de Campo	37
1.3	Massas dos Bósons	38
2	Setor dos Campos Férmions	38
2.1	Lagrangiana dos Campos Férmions	38
2.2	Derivada Covariante Após a Quebra de Simetria	39
2.2.1	Componentes da Derivada Covariante:	39
2.2.2	Significado de T^+ , T^- , e T_Z :	39
2.3	Transformações de Gauge dos Campos Após a Quebra de Simetria	40
2.3.1	Quarks Esquerdos Q_L	40
2.3.2	Quarks Up Direitos u_R	40
2.3.3	Quarks Down Direitos d_R	41
2.3.4	Léptons Esquerdos L_L	41
2.3.5	Léptons Direitos e_R	41
3	Setor do Campo de Higgs	42
3.1	Lagrangiana do Campo de Higgs	42
3.2	Modelo Padrão Após a Quebra Espontânea de Simetria	42
3.2.1	Graus de Liberdade e Quebra de Simetria	43
3.2.2	Relação com o Parâmetro μ^2	43
3.2.3	Resumo	44
3.3	Termos de Auto-Interação do Higgs	44
3.3.1	Importância Experimental	44
3.3.2	Estabilidade do Potencial do Higgs	45
3.4	Transformação de Gauge do Campo de Higgs Após a Quebra de Simetria	45
4	Interação do Higgs com os Campos de Gauge	46
4.1	Lagrangiana do Campo de Higgs com os Campos de Gauge	46
4.2	Origem do Fator $\frac{\rho}{v}$	46
4.2.1	Significado Físico de $\frac{\rho}{v}$	47

4.2.2	Impacto Teórico do Fator $\frac{e}{v}$	47
5	Interação do Higgs com os Férmions	47
5.1	Lagrangiana do Campo de Higgs com os Férmions	48
5.2	Origem dos Termos de Massa	48
5.3	Diagonalização das Matrizes de Yukawa	49
5.4	Mistura e Matrizes CKM e PMNS	49
5.4.1	Relação entre Matrizes de Yukawa e as Matrizes CKM e PMNS	49
5.4.2	Matriz CKM: Mistura no Setor de Quarks	50
5.4.3	Matriz PMNS: Mistura no Setor de Léptons	51
5.4.4	Comparação entre CKM e PMNS	51
5.4.5	Significado Físico	51
5.5	Tabela de Massas e Acoplamentos de Yukawa dos Férmions	52
6	Análise do Desacoplamento das Correntes	52
6.1	Lagrangiana de Termos de Interação	52
6.2	Definição de e : Constante Eletromagnética	53
6.3	Cargas Associadas	53
6.3.1	Carga Elétrica (Q)	53
6.3.2	Carga Neutra (g_V, g_A)	53
6.4	Correntes Associadas	54
6.4.1	Correntes Carregadas ($J^{\pm\mu}$)	54
6.4.2	Corrente Eletromagnética ($J^{\text{em}\mu}$)	54
6.4.3	Corrente Neutra ($J^{\text{NC}\mu}$)	54
6.5	Resumo das Correntes e Interações	55
7	Parâmetros Livres do Modelo Padrão	55
7.1	Setor dos Bósons de Gauge	55
7.2	Setor do Campo de Higgs	55
7.3	Setor dos Férmions	56
7.4	Definição do Ângulo de Weinberg	56

7.5	Resumo dos Parâmetros Livres	58
7.6	Impacto dos Parâmetros Livres	58
8	Lagrangiana Completa do Modelo Padrão	58
8.1	Componentes da Lagrangiana	59
III	Física de Sabor, Violação de CP e Bariogênese	62
1	Violação de CP, Matriz CKM e Bariogênese	62
1.1	A Matriz CKM: Origem e Estrutura	62
1.2	Parâmetros Físicos: 3 Ângulos + 1 Fase	63
1.3	Parametrização Padrão (PDG)	64
1.4	Parametrização de Wolfenstein	64
1.5	O Triângulo Unitário	64
1.6	Invariante de Jarlskog	65
1.7	Violação de CP em Kaons	66
1.8	Oscilações de Mésons Neutros	67
1.9	Assimetrias Dependentes do Tempo	68
1.10	Bariogênese: As Condições de Sakharov	68
1.11	Por que o MP Falha	69
1.12	Implicações: Nova Física Obrigatória	69
2	Setor de Neutrinos e Matriz PMNS	70
2.1	Oscilações de Neutrinos: Fenomenologia	70
2.2	Efeito MSW: Oscilações em Matéria	71
2.3	Evidências Experimentais	71
2.4	A Matriz PMNS	72
2.5	Comparação CKM vs. PMNS	73
2.6	Hierarquia de Massas: Normal vs. Invertida	73
2.7	Escala Absoluta de Massas	74
2.8	Dirac vs. Majorana: A Questão Fundamental	74

2.9	Mecanismo Seesaw	75
2.10	Decaimento Duplo Beta sem Neutrinos ($0\nu\beta\beta$)	76
2.11	Leptogênese: Conexão com a Bariogênese	77
2.12	Síntese: Neutrinos Como Janela Para Nova Física	77
IV	Formalismo da Teoria Quântica de Campos	79
1	Fundamentos Teóricos: Da Integral de Caminho à Matriz S	79
2	Quantização por Integral de Caminho	79
2.1	A Integral de Caminho e o Funcional Gerador	80
2.2	Campo Escalar Livre: Cálculo Explícito	80
2.3	Teoria com Interações	81
2.4	Campos Fermiônicos e Variáveis de Grassmann	81
2.5	Campos de Gauge: Procedimento de Faddeev-Popov	82
3	Rotação de Wick e Integral de Caminho Euclidiana	82
3.1	A Rotação no Plano Complexo do Tempo	82
3.2	Transformação da Ação	83
3.3	O Funcional Gerador Euclidiano	83
3.4	Conexão com Mecânica Estatística: Partição de Boltzmann	84
3.5	Temperatura Finita: Tempo Imaginário Periódico	84
4	Aproximação do Ponto de Sela e a Expansão Semiclássica	85
5	Soluções Não-Perturbativas: Instantons	86
5.1	Exemplo Pedagógico: Potencial de Duplo Poço em QM	86
5.2	Instantons em Yang-Mills: BPST	86
5.3	Vácuo θ e o Problema de CP Forte	87
5.4	Anomalia Axial e Instantons	88
6	Solitons: Soluções Estáticas Topologicamente Estáveis	88

6.1	Kink em 1+1 Dimensões	88
6.2	Vórtice de Nielsen-Olesen (Teoria Abelian de Higgs em 2+1)	89
6.3	Monopolo de 't Hooft-Polyakov	89
6.4	Limite BPS e Supersimetria	90
7	Síntese: Papel Dual da Integral de Caminho	90
8	Funções de Green	91
8.1	Funções de Green de n Pontos	91
8.2	Funcional Gerador de Funções Conexas $W[J]$	92
8.3	Ação Efetiva $\Gamma[\varphi]$ e Funções 1PI	92
8.4	Propagador Exato e Auto-Energia	92
8.5	Hierarquia das Funções	93
9	Fórmula de Redução LSZ e a Matriz S	93
9.1	Hipóteses Assintóticas	93
9.2	Fórmula LSZ para Campos Escalares	93
9.3	LSZ para Férmions	94
9.4	LSZ para Bósons Vetoriais	94
9.5	A Matriz S e a Amplitude Invariante $\mathcal{M}$	95
9.6	Série de Dyson e Expansão Perturbativa	95
9.7	Unitariedade e Teorema Óptico	95
V	Regras de Feynman e Cálculo de Observáveis	97
1	O Dicionário de Feynman (Regras Práticas)	97
1.1	Receita Geral	97
1.2	Linhas Externas (Estados Iniciais e Finais)	98
1.3	Propagadores (Partículas Virtuais Internas)	99
1.4	Vértices de Interação	100
2	Cinemática e Amplitudes de Espalhamento ($\mathcal{M}$)	102

2.1	Decaimento do Bóson W^- : $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$	102
2.2	Espalhamento Compton ($e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$)	102
2.3	Espalhamento Quark-Glúon ($q + g \rightarrow q + g$)	103
3	Conexão Experimental: Calculando Observáveis Físicas	103
3.1	Taxa de Decaimento (Γ)	104
3.2	Seção de Choque (σ)	104
3.3	Exemplos Adicionais	105
VI	Renormalização e Grupo de Renormalização	106
1	Renormalização: Auto-Energia, Polarização do Vácuo e Vértice	106
1.1	Contagem de Graus de Divergência Superficial	106
1.2	Regularização Dimensional: A Ferramenta	107
1.3	Parametrização de Feynman	108
2	Polarização do Vácuo (Auto-Energia do Fóton)	108
2.1	Cálculo Explícito	108
2.2	Estrutura Transversal: Identidade de Ward	109
2.3	Propagador Completo e Running de α	109
2.4	Interpretação Física	110
3	Auto-Energia do Elétron	110
3.1	Cálculo	110
3.2	Estrutura: Massa e Função de Onda	110
3.3	Proteção Quiral: A Mágica de 't Hooft	111
3.4	Massa Física e Resíduo	111
4	Correção de Vértice	111
4.1	Cálculo	112
4.2	Decomposição em Fatores de Forma	112
4.3	F_1 e Renormalização da Carga	112

4.4	F_2 e o Momento Magnético Anômalo	112
4.5	Identidade de Ward-Takahashi: $Z_1 = Z_2$	113
5	Formalismo de Contratermos	113
5.1	Esquemas de Renormalização	114
6	Equações do Grupo de Renormalização	114
6.1	β -função da QED	114
6.2	β -função da QCD	115
6.3	Por que a Diferença de Sinal?	115
VII	QCD Não-Perturbativa	116
1	QCD Não-Perturbativa: Simetria Quiral e ChPT	116
1.1	Simetria Quiral e sua Quebra Espontânea	116
1.2	O Condensado Quiral	117
1.3	Píons como Bósons de Goldstone	117
1.4	Origem da Massa Hadrônica	118
1.5	Chiral Perturbation Theory (ChPT)	118
1.6	O Modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)	120
1.7	Expansão $1/N_c$ de 't Hooft	121
1.8	Regras de Soma de QCD (SVZ)	122
1.9	Funções de Distribuição Partônica (PDFs)	122
1.10	Teoremas de Fatorização	124
1.11	Confinamento: O Problema em Aberto	124
1.12	Síntese	125
2	Lattice QCD	125
2.1	A Ideia: Discretização do Espaço-Tempo	125
2.2	Campos de Gauge: Variáveis de Ligação de Wilson	126
2.3	A Ação de Wilson	126

2.4	Férmions na Rede: O Problema da Duplicação	127
2.5	Férmions de Wilson	128
2.6	Férmions Escalonados (Staggered, Kogut-Susskind)	128
2.7	Férmions de Domínio-Parede e Overlap	128
2.8	Integração Funcional via Monte Carlo	128
2.9	Algoritmo Hybrid Monte Carlo (HMC)	129
2.10	Extração de Massas: Funções de Correlação	129
2.11	Ajuste ao Contínuo e ao Ponto Físico	130
2.12	Resultados Principais	130
2.13	Problemas em Aberto	131
2.14	Impacto da Lattice QCD	131
3	Mapa Conceitual: Da Lagrangiana ao Experimento	132
3.1	Considerações Finais	132
VIII	Consistência Quântica e Testes de Precisão	134
1	Derivação Explícita da Fórmula LSZ	134
1.1	Campos <i>in/out</i> e Hipótese Assintótica	134
1.2	Redução de Uma Partícula	135
1.3	Iteração e Forma Final	135
1.4	Interpretação Diagramática	136
1.5	Generalização: Férmions e Bósons Vetoriais	136
2	Exemplos Adicionais de Cálculo de Amplitudes	136
2.1	Espalhamento Bhabha: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$	136
2.2	Espalhamento Møller: $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$	137
2.3	Processo Drell-Yan: $q\bar{q} \rightarrow \ell^+\ell^-$	137
3	Simetria BRST e Identidades de Ward-Takahashi	138
3.1	Transformações BRST	139

3.2	Nilpotência: $Q^2 = 0$	139
3.3	Lagrangiana BRST-Invariante	139
3.4	Identidades de Slavnov-Taylor	140
3.5	Identidades de Ward-Takahashi (caso abeliano)	140
3.6	Consequências Físicas	141
4	Anomalias Quirais e Cancelamento no Modelo Padrão	141
4.1	Anomalia ABJ (Adler-Bell-Jackiw)	141
4.2	Anomalias Não-Abelianas e o Triângulo $[T^a, T^b, T^c]$	142
4.3	Condição de Cancelamento no Modelo Padrão	142
4.4	Verificação Explícita por Geração	142
4.5	Significado Profundo	143
5	Correções Eletrofracas de Precisão: Parâmetros S, T, U	143
5.1	Motivação: Correções Oblíquas vs. Vértex	143
5.2	Definição a Partir das Auto-Energias	144
5.3	Interpretação Física	144
5.4	Valores Experimentais Atuais	145
5.5	Aplicação a Extensões do MP	145
5.6	Significado Conceitual	145
IX	Física Além do Modelo Padrão	147
1	Matéria Escura e Cosmologia de Partículas	147
1.1	As Evidências Gravitacionais	147
1.2	Propriedades Requeridas	149
1.3	Candidatos Principais	149
1.4	Freeze-Out Térmico: Cálculo da Relíquia	150
1.5	Estratégias de Detecção	150
1.6	Crise do Paradigma WIMP?	151
1.7	Problemas em Pequena Escala do Λ CDM	152

1.8	Energia Escura: O Outro 68%	152
1.9	Síntese: MP é Obrigatoriamente Incompleto	152
2	Supersimetria e o MSSM	153
2.1	A Álgebra de SUSY	153
2.2	Supermultipletes	153
2.3	O MSSM (Minimal Supersymmetric Standard Model)	154
2.4	Paridade R e Estabilidade do Próton	155
2.5	Solução do Problema da Hierarquia	155
2.6	Unificação de Acoplamentos	156
2.7	Mecanismos de Quebra de SUSY	156
2.8	Fenomenologia e Estado Experimental	157
2.9	Crise de Naturalidade?	157
2.10	Supergravidade (SUGRA)	158
2.11	Síntese	158
3	Grandes Teorias Unificadas (GUTs)	159
3.1	Motivação: Unificação de Acoplamentos	159
3.2	$SU(5)$: A GUT Mais Simples (Georgi-Glashow 1974)	159
3.3	$SU(5)$ SUSY	160
3.4	$SO(10)$: Elegância Ainda Maior	161
3.5	Pati-Salam ($SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$)	161
3.6	E_6 e Unificações Maiores	162
3.7	Predições Observacionais de GUTs	162
3.8	Problemas das GUTs	163
3.9	Síntese	163
4	SMEFT: O Modelo Padrão Como Teoria Efetiva	164
4.1	A Filosofia da EFT	164
4.2	Operador de Dimensão-5: Massa de Majorana	165
4.3	Operadores de Dimensão-6: A Base de Warsaw	165

4.4	Matching: Ligação com a Teoria UV	166
4.5	Running dos Coeficientes de Wilson	167
4.6	Aplicações Fenomenológicas	167
4.7	Limites Representativos (Ordens de Magnitude)	168
4.8	HEFT: Alternativa Não-Linear	168
4.9	Direções Futuras	169
4.10	Síntese	169
X	Quantização Canônica dos Campos	171
1	Introdução Axiomática	171
2	Campos Escalares e a Equação de Klein-Gordon	172
2.1	Campo Escalar Real Neutro	172
2.2	Campo Escalar Complexo Carregado	173
2.3	Dubleto Escalar de Higgs sob $SU(2)_L \times U(1)_Y$	174
3	Campos Espinoriais de Dirac e Estrutura Quiral do Modelo Padrão	174
3.1	Estrutura Quiral do Modelo Padrão: $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	175
4	Campos Vetoriais Massivos de Proca: Z^0 e $W^\pm$	176
5	Campos de Calibre sem Massa: Fótons e Glúons	177
5.1	O Campo de Maxwell e o Método Gupta-Bleuler	177
5.2	Glúons $SU(3)_C$	177
6	Fantasma de Faddeev-Popov	178
7	Extensões Gravitacionais e Supergravidade	178
7.1	Gravitino: Campo de Spin 3/2	178
7.2	Gráviton: Campo de Spin 2	179
8	Síntese Final: Quantização Canônica vs. Integral de Caminho	180

XI	Teoria de Campos em Espaços-Tempos Curvos	181
1	Geometria Diferencial Necessária: Revisão	182
2	O Problema Fundamental: Férmions Exigem Tétradas	182
3	Formalismo de Tétradas e Conexão de Spin	183
3.1	Tétradas (Vierbeine)	183
3.2	Derivada Covariante Lorentz e a Conexão de Spin	183
3.3	O Postulado da Tétrada e a Relação $\omega = \omega(e)$	184
3.4	Campos Espinoriais em Espaço Curvo	184
3.5	Curvatura da Conexão de Spin	185
4	O Formalismo de Cartan: Linguagem de Formas Diferenciais	185
4.1	Tétrada como 1-Forma	185
4.2	Primeira Equação de Estrutura de Cartan	185
4.3	Segunda Equação de Estrutura de Cartan	186
4.4	Identidades de Bianchi	186
4.5	Ação de Einstein-Hilbert em Cartan	186
5	Quantização em Espaços-Tempos Curvos	187
5.1	Campo Escalar: Equação de Klein-Gordon Curva	187
5.2	Expansão em Modos	187
5.3	A Ambiguidade Fundamental: Não Há Vácuo Único	187
5.4	Transformações de Bogoliubov	188
5.5	Densidade de Partículas no Vácuo Alternativo	188
6	O Efeito Unruh	189
6.1	O Setup	189
6.2	A Transformação de Bogoliubov	189
6.3	O Resultado: Espectro Térmico	189
7	O Efeito Hawking	190

7.1	Preparação: Geometria de Schwarzschild	190
7.2	Bogoliubov Entre Modos <i>In</i> e <i>Out</i>	190
7.3	O Resultado de Hawking (1974)	191
7.4	O Mecanismo em Detalhe	191
7.5	Leis da Termodinâmica de Buracos Negros	191
7.6	O Paradoxo da Informação	192
8	Tensor de Energia-Momento Renormalizado	192
8.1	O Problema Divergente	192
8.2	Procedimentos de Regularização	193
8.3	A Anomalia Conforme	193
9	Aplicações Cosmológicas	194
9.1	Produção de Partículas em Universo em Expansão	194
9.2	Inflação e Flutuações Primordiais	194
9.3	Espaço de de Sitter e Sua Temperatura	195
10	Modelo Padrão em <i>Backgrounds</i> Curvos	195
11	Desafios Conceituais em Aberto	196
11.1	1. Ambiguidade do Vácuo	196
11.2	2. O Problema da <i>Backreaction</i>	196
11.3	3. O Paradoxo da Informação	196
11.4	4. Constante Cosmológica	196
11.5	5. Renormalizabilidade	197
11.6	6. Tempo em Gravitação Quântica	197
12	Conexões com Abordagens de Gravitação Quântica	197
13	Síntese	198

1 Introdução

O Modelo Padrão da Física de Partículas é uma das teorias mais robustas da física moderna, descrevendo com precisão as interações fundamentais: forte, fraca e eletromagnética. Essas interações são mediadas pelos bósons de gauge e fundamentadas em princípios de simetria de gauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Além disso, o campo de Higgs desempenha um papel crucial ao introduzir o mecanismo de quebra espontânea de simetria, que explica a geração de massas para partículas fundamentais.

Este documento apresenta uma análise detalhada da Lagrangiana do Modelo Padrão, destacando a transição entre dois regimes fundamentais: antes e depois da quebra espontânea de simetria eletrofraca, culminando nas regras práticas para o cálculo de interações. O conteúdo é organizado nas seguintes partes:

- **Parte I – O Modelo Padrão Antes da Quebra de Simetria:** Examina os fundamentos da teoria com todas as simetrias de gauge preservadas: tensores de campo, termos cinéticos e interações entre campos de gauge, férmions e o campo de Higgs.
- **Parte II – O Modelo Padrão Após a Quebra de Simetria:** Descreve o mecanismo de Higgs, a geração de massas, a reorganização da Lagrangiana em campos físicos e a Lagrangiana completa do MP.
- **Parte III – Física de Sabor, Violação de CP e Bariogênese:** Desenvolve a matriz CKM, a matriz PMNS, oscilações de neutrinos e a insuficiência da violação de CP para a bariogênese.
- **Parte IV – Formalismo da Teoria Quântica de Campos:** Quantização por integral de caminho, soluções não-perturbativas (instantons, solitons), funções de Green e fórmula de redução LSZ.
- **Parte V – Regras de Feynman e Cálculo de Observáveis:** O dicionário de Feynman para propagadores e vértices, amplitudes invariantes, seções de choque e taxas de decaimento.
- **Parte VI – Renormalização e Grupo de Renormalização:** Auto-energia, polarização do vácuo, contratermos e equações do grupo de renormalização.
- **Parte VII – QCD Não-Perturbativa:** Simetria quirais, Chiral Perturbation Theory, modelo NJL, expansão $1/N_c$ e Lattice QCD.
- **Parte VIII – Consistência Quântica e Testes de Precisão:** Derivação explícita da LSZ, simetria BRST, anomalias quirais e parâmetros oblíquos S , T , U .

- **Parte IX – Física Além do Modelo Padrão:** Matéria escura, supersimetria (MSSM), teorias de grande unificação (GUTs) e o SMEFT.
- **Parte X – Quantização Canônica dos Campos:** Abordagem Hamiltoniana complementar para todos os campos do MP e extensões gravitacionais.
- **Parte XI – Teoria de Campos em Espaços-Tempos Curvos:** Tétradas, efeitos Unruh e Hawking, aplicações cosmológicas e conexões com gravitação quântica.

Parte I

O Modelo Padrão Antes da Quebra de Simetria

O Modelo Padrão, antes da quebra espontânea de simetria, é estruturado em três setores principais: os Campos de Gauge, os Campos Férmions e o Campo de Higgs. As interações entre essas entidades são descritas por suas lagrangianas fundamentais e propriedades simétricas.

Os tópicos abordados incluem:

- **Setor Cinético dos Campos de Gauge:** Contém a lagrangiana dos campos de gauge, transformações de gauge, grupos de simetria ($SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$) e a formulação de Yang-Mills.
- **Setor dos Campos Férmions:** Explora a lagrangiana dos campos férmions, derivada covariante, hipercarga e isospin, além de transformações fundamentais como CPT e matrizes de Pauli, Gell-Mann e Dirac.
- **Setor do Campo de Higgs:** Foca na lagrangiana do campo de Higgs, seus parâmetros e as transformações associadas.
- **Setor de Interação Yukawa:** Detalha a lagrangiana de interação Yukawa, os acoplamentos responsáveis pelas massas dos férmions.

Essas seções culminam com a formulação completa da lagrangiana do Modelo Padrão antes da quebra espontânea de simetria.

1 Setor Cinético dos Campos de Gauge

1.1 Lagrangiana dos Campos de Gauge

A Lagrangiana descreve o setor cinético dos campos de gauge:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu},$$

onde os tensores de campo são definidos como:

- $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$.
- $W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$.
- $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

1.2 Comutadores da Álgebra de Lie

Os grupos de simetria $SU(3)$ e $SU(2)$ seguem as relações de comutação:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i f^{abc} \lambda^c, \quad [\sigma^i, \sigma^j] = 2i \epsilon^{ijk} \sigma^k,$$

onde λ^a são os geradores de $SU(3)$ e σ^i os de $SU(2)$. As propriedades principais incluem:

- **Antissimetria:** $f^{abc} = -f^{bac}$, $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik}$.
- **Identidade de Jacobi:**

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0.$$

Adicionalmente, os geradores normalizados $T^a = \lambda^a/2$ (para $SU(3)$) e $T^i = \sigma^i/2$ (para $SU(2)$) satisfazem

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad \text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab},$$

relação fundamental para o cálculo de fatores de cor e isospin em amplitudes.

1.3 Grupos de Simetria $SU(3)$, $SU(2)$, e $U(1)$

- **$SU(3)$:** Representa a simetria de cor na QCD. O campo G_μ^a corresponde aos glúons.

- **SU(2):** Aparece na interação fraca, com W_μ^i representando os bósons $W^\pm$ e Z^0 .
- **U(1):** Relaciona-se à interação eletromagnética. O campo B_μ está associado ao fóton após a quebra de simetria.

1.4 Campos de Yang-Mills e Auto-interações Não-Abelianas

Os campos de Yang-Mills são descritos por tensores não-abelianos:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

interpretado como o comutador das derivadas covariantes:

$$[D_\mu, D_\nu]^a = -ig F_{\mu\nu}^a, \quad D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a T^a$$

A característica fundamental das teorias de gauge não-abelianas ($SU(2)$ e $SU(3)$) é que os bósons mediadores interagem entre si, pois carregam a carga da própria interação. Ao expandir o termo quadrado do tensor de campo $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$, obtemos três contribuições distintas:

1. Termo Cinético Puro (Quadrático):

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a})$$

Este termo descreve a propagação livre do bóson.

2. Interação Cúbica (Vértice de 3 Bósons): Surge do produto cruzado e representa três bósons interagindo em um único ponto:

$$\mathcal{L}_{\text{cúbica}} = -g f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c}$$

- **Para SU(3) (Glúons):** Descreve um glúon emitindo ou absorvendo outro glúon ($g \rightarrow g_s$, f^{abc} são as constantes de estrutura de $SU(3)$).
- **Para SU(2) (Interação Fraca):** Descreve as interações dos bósons W entre si ($g \rightarrow g$, $f^{abc} \rightarrow \epsilon^{ijk}$).

3. Interação Quártica (Vértice de 4 Bósons): Representa quatro bósons interagindo simultaneamente:

$$\mathcal{L}_{\text{quártica}} = -\frac{g^2}{4} f^{abe} f^{cde} A_\mu^a A_\nu^b A^{\mu c} A^{\nu d}$$

O grupo $U(1)$, sendo abeliano, possui constante de estrutura nula ($f^{abc} = 0$), explicando por que os fótons não interagem diretamente entre si.

1.5 Transformações de Gauge dos Campos

Os campos de gauge no Modelo Padrão transformam-se sob as simetrias locais associadas aos grupos $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, e $U(1)_Y$, garantindo a invariância do Lagrangiano e a consistência das interações entre partículas fundamentais.

1.5.1 Glúons G_μ^a

- **Campo:** G_μ^a
- **Transformações:**

$$- SU(3)_C: G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \rightarrow e^{i\theta_b(x)\frac{\lambda^b}{2}} \left(G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \right) e^{-i\theta_b(x)\frac{\lambda^b}{2}} + \frac{i}{g_s} e^{i\theta_b(x)\frac{\lambda^b}{2}} \partial_\mu e^{-i\theta_b(x)\frac{\lambda^b}{2}}.$$

1.5.2 Bósons $W^\pm, Z$ W_μ^i

- **Campo:** W_μ^i
- **Transformações:**

$$- SU(2)_L: W_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow e^{i\alpha_j(x)\frac{\sigma^j}{2}} \left(W_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \right) e^{-i\alpha_j(x)\frac{\sigma^j}{2}} + \frac{i}{g} e^{i\alpha_j(x)\frac{\sigma^j}{2}} \partial_\mu e^{-i\alpha_j(x)\frac{\sigma^j}{2}}.$$

1.5.3 Bóson $U(1)_Y$ B_μ

- **Campo:** B_μ
- **Transformações:**

$$- U(1)_Y: B_\mu \rightarrow B_\mu - \frac{1}{g'} \partial_\mu \alpha(x).$$

1.5.4 Tensor de Força $SU(3)_C$ $G_{\mu\nu}^a$

- **Campo:** $G_{\mu\nu}^a$
- **Transformações:**

$$- SU(3)_C: G_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2} \rightarrow e^{i\theta_b(x)\frac{\lambda^b}{2}} \left(G_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2} \right) e^{-i\theta_b(x)\frac{\lambda^b}{2}}.$$

1.5.5 Tensor de Força $SU(2)_L$ $W_{\mu\nu}^i$

- **Campo:** $W_{\mu\nu}^i$

- **Transformações:**

$$- SU(2)_L: W_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow e^{i\alpha_j(x)\frac{\sigma^j}{2}} \left(W_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \right) e^{-i\alpha_j(x)\frac{\sigma^j}{2}}.$$

1.5.6 Tensor de Força $U(1)_Y$ $B_{\mu\nu}$

- **Campo:** $B_{\mu\nu}$

- **Transformações:**

$$- U(1)_Y: B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu}.$$

2 Setor dos Campos Férmions

2.1 Lagrangiana dos Campos Férmions

A Lagrangiana descreve as dinâmicas dos campos férmions, incorporando suas interações com os campos de gauge:

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}} = \sum_{\text{gerações}} \left(\bar{Q}_L i\gamma^\mu D_\mu Q_L + \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu d_R + \bar{L}_L i\gamma^\mu D_\mu L_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R \right),$$

onde:

- $Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$, $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$: Dubletos de quarks e léptons.
- u_R, d_R, e_R : Quarks e léptons direitos, representados como singletos sob $SU(2)_L$.
- $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$: O termo com a barra sobre o campo, como $\bar{Q}_L$, é a adjunta de Dirac do campo Q_L .
- $\gamma^\mu D_\mu$: Representa a contração da derivada covariante com as matrizes de Dirac, ditando a dinâmica e a interação dos férmions de spin-1/2.

2.2 Derivada Covariante

A derivada covariante é uma extensão da derivada parcial que incorpora os campos de gauge para garantir invariância sob transformações locais dos grupos de simetria. Ela é

definida como:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a + ig \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i + ig' Y B_\mu,$$

com os seguintes components:

- ∂_μ : Derivada parcial usual no espaço-tempo.
- G_μ^a : Campo de glúons associado ao grupo $SU(3)_C$.
- W_μ^i : Campo de gauge do grupo $SU(2)_L$.
- B_μ : Campo de gauge do grupo $U(1)_Y$.
- g_s, g, g' : Constantes de acoplamento dos grupos $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, e $U(1)_Y$.
- λ^a, σ^i : Geradores dos grupos $SU(3)_C$ e $SU(2)_L$.
- Y : Hipercarga do campo.

2.3 Hipercarga, Isospin e Representações

- **Hipercarga (Y):** É a carga associada ao grupo de simetria $U(1)_Y$. Sua relação com a carga elétrica Q e o isospin T_3 é dada por:

$$Q = T_3 + Y,$$

onde T_3 é a terceira componente do isospin fraco.

- **Isospin (T_3):** É uma propriedade associada ao grupo $SU(2)_L$, representando a orientation dos estados quânticos dentro do dubleto.
- **Representações:** Os números **3**, **2**, e **1** indicam como os campos se transformam sob os grupos de simetria $SU(3)$, $SU(2)$, e $U(1)$.

2.4 Tabela de Campos Férmions

Os campos férmions do Modelo Padrão são categorizados pelas suas representações nos grupos de simetria $SU(3)$, $SU(2)$, e $U(1)$, além de suas hipercargas e valores de isospin:

Campo	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$	Hipercarga (Y)	Isospin (T_3)
Q_L (Quarks esquerdos)	3	2	1	1/6	$\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
u_R (Quarks up direitos)	3	1	1	2/3	0
d_R (Quarks down direitos)	3	1	1	-1/3	0
L_L (Léptons esquerdos)	1	2	1	-1/2	$\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
e_R (Léptons direitos)	1	1	1	-1	0

Tabela 1: Representações dos campos férmions nos grupos de simetria do Modelo Padrão, incluindo hipercarga (Y) e isospin (T_3).

2.5 Matrizes de Pauli, Gell-Mann e Dirac

2.5.1 Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli são três matrizes 2×2 hermitianas usadas como geradores do grupo $SU(2)$:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essas matrizes satisfazem a relação de comutação:

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k,$$

e o anticomutador

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}I,$$

onde ϵ^{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.

2.5.2 Matrizes de Gell-Mann

As matrizes de Gell-Mann são oito matrizes 3×3 hermitianas que servem como geradores do grupo $SU(3)$:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Essas matrizes obedecem à relação de comutação:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c,$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$.

2.5.3 Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac são quatro matrizes 4×4 usadas para descrever férmions relativísticos em teorias quânticas de campo. No sistema de representação de Weyl:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

onde I é a matriz identidade 2×2 e σ^i são as matrizes de Pauli. Essas matrizes satisfazem o anti-comutador:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}I,$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski, definido como:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, a matriz γ^5 , usada na quiralidade, é definida como:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Na representação de Weyl, essa matriz adquire a forma diagonal

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{pmatrix},$$

de modo que γ^5 anticomuta com todas as γ^μ : $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, e satisfaz $(\gamma^5)^2 = I$.

Identidades de traços úteis:

$$\begin{aligned}\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4\eta^{\mu\nu}, \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}), \\ \text{tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \text{tr}(\text{produto ímpar de } \gamma) &= 0.\end{aligned}$$

2.6 Quiralidade e Transformação CPT

2.6.1 Quiralidade

Quiralidade distingue as componentes esquerda e direita de um campo fermiônico. Os projetores de quiralidade são definidos como:

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2},$$

onde $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Campos quirais são então dados por:

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi.$$

Esses projetores satisfazem $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$, $P_L + P_R = I$. A adjunta de Dirac comporta-se como $\overline{\psi}_L = \overline{\psi} P_R$ e $\overline{\psi}_R = \overline{\psi} P_L$. A quiralidade é fundamental para a descrição de interações fracas no Modelo Padrão, pois estas interagem apenas com os campos quirais esquerdos.

2.7 Transformação CPT

2.7.1 Conjugação de Carga (C)

- Troca partículas por antipartículas.
- Sob C , um campo ψ transforma-se em:

$$\psi \rightarrow \psi^C = C \overline{\psi}^T,$$

onde C é a matriz de conjugação de carga que satisfaz:

$$C \gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T.$$

Uma escolha explícita é $C = i\gamma^2\gamma^0$.

2.7.2 Paridade (P)

- Inverte as coordenadas espaciais: $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$.
- Sob P :

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}).$$

2.7.3 Reversão Temporal (T)

- Inverte a direção do tempo: $t \rightarrow -t$.
- Sob T (operador antiunitário):

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow T \psi(-t, \vec{x}), \quad T = i\gamma^1\gamma^3.$$

2.7.4 Simetria CPT

- A combinação de C , P , e T é uma simetria fundamental garantida em todas as teorias quânticas de campo locais, Lorentz-invariantes e com hamiltoniano hermitiano (Teorema CPT de Pauli-Lüders).
- Para um campo ψ :
$$\psi \rightarrow (CPT)\psi = \gamma^5 \psi^C(-t, -\vec{x}).$$
- Essa simetria assegura que as leis da física permanecem invariantes sob a troca simultânea de C , P , e T . Uma de suas consequências diretas é a igualdade entre massas e larguras totais de partícula e antipartícula.

2.8 Transformações de Gauge dos Campos

Os campos fermiônicos no Modelo Padrão representam as partículas de matéria e transformam-se sob as simetrias de gauge dos grupos $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, e $U(1)_Y$, assegurando a preservação da invariância do Lagrangiano e a estrutura das interações fundamentais.

2.8.1 Quarks Esquerdos Q_L

- Campo: $Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$
- Transformações:

- $SU(3)_C$: $Q_L \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} Q_L$.
- $SU(2)_L$: $Q_L \rightarrow e^{i\alpha_i(x)\frac{\sigma^i}{2}} Q_L$.
- $U(1)_Y$: $Q_L \rightarrow e^{i\alpha(x)Y} Q_L$.

• **Transformação Geral:**

$$Q_L \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} e^{i\alpha_i(x)\frac{\sigma^i}{2}} Q_L e^{i\alpha(x)Y}.$$

2.8.2 Quarks Up Direitos u_R

• **Campo:** u_R

• **Transformações:**

- $SU(3)_C$: $u_R \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} u_R$.
- $SU(2)_L$: $u_R \rightarrow u_R$.
- $U(1)_Y$: $u_R \rightarrow e^{i\alpha(x)Y} u_R$.

• **Transformação Geral:**

$$u_R \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} u_R e^{i\alpha(x)Y}.$$

2.8.3 Quarks Down Direitos d_R

• **Campo:** d_R

• **Transformações:**

- $SU(3)_C$: $d_R \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} d_R$.
- $SU(2)_L$: $d_R \rightarrow d_R$.
- $U(1)_Y$: $d_R \rightarrow e^{i\alpha(x)Y} d_R$.

• **Transformação Geral:**

$$d_R \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} d_R e^{i\alpha(x)Y}.$$

2.8.4 Léptons Esquerdos L_L

• **Campo:** $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$

• **Transformações:**

- $SU(3)_C$: $L_L \rightarrow L_L$.

- $SU(2)_L$: $L_L \rightarrow e^{i\alpha_i(x)\frac{\sigma^i}{2}} L_L$.
- $U(1)_Y$: $L_L \rightarrow e^{i\alpha(x)Y} L_L$.

- **Transformação Geral:**

$$L_L \rightarrow e^{i\alpha_i(x)\frac{\sigma^i}{2}} L_L e^{i\alpha(x)Y}.$$

2.8.5 Léptons Direitos e_R

- **Campo:** e_R

- **Transformações:**

- $SU(3)_C$: $e_R \rightarrow e_R$.
- $SU(2)_L$: $e_R \rightarrow e_R$.
- $U(1)_Y$: $e_R \rightarrow e^{i\alpha(x)Y} e_R$.

- **Transformação Geral:**

$$e_R \rightarrow e_R e^{i\alpha(x)Y}.$$

3 Setor do Campo de Higgs

3.1 Lagrangiana do Campo de Higgs

A Lagrangiana descreve as dinâmicas e interações do campo de Higgs, incluindo a quebra espontânea de simetria:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2,$$

onde:

- $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ é o dubleto do campo de Higgs, com hipercarga $Y = +1/2$.
- $D_\mu \phi = \left(\partial_\mu + ig\frac{\sigma^i}{2}W_\mu^i + ig'YB_\mu \right) \phi$ é a derivada covariante aplicada ao campo de Higgs.

3.2 Parâmetros do Campo de Higgs

Os parâmetros associados ao potencial do Higgs determinam as propriedades fundamentais da quebra espontânea de simetria. Na convenção adotada, o potencial é

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2,$$

com:

- $\mu^2 > 0$: Parâmetro que torna a origem um ponto de máximo local, induzindo a quebra espontânea de simetria.
- $\lambda > 0$: Constante que controla a intensidade da auto-interação do Higgs e assegura a limitação inferior do potencial.
- v : Valor esperado no vácuo do Higgs, definido como:

$$v = \sqrt{\mu^2/\lambda} \approx 246 \text{ GeV}.$$

Valores típicos:

$$\mu^2 \approx (88 \text{ GeV})^2, \quad \lambda \approx 0.13.$$

3.3 Transformação de Gauge

O campo de Higgs transforma-se sob as simetrias de gauge do Modelo Padrão, preservando a invariância do Lagrangiano:

- **Campo:** $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$
- **Transformações:**
 - $SU(3)_C$: $\phi \rightarrow \phi$.
 - $SU(2)_L$: $\phi \rightarrow e^{i\alpha_i(x)\frac{\sigma_i}{2}} \phi$.
 - $U(1)_Y$: $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)Y} \phi$.

- **Transformação Geral:**

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha_i(x)\frac{\sigma_i}{2}} \phi e^{i\alpha(x)Y}.$$

4 Setor de Interação Yukawa

4.1 Lagrangiana de Interação Yukawa

A Lagrangiana descreve as interações de Yukawa que geram as massas dos férmions após a quebra espontânea de simetria pelo campo de Higgs:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -Y_u \bar{Q}_L \phi^c u_R - Y_d \bar{Q}_L \phi d_R - Y_e \bar{L}_L \phi e_R + \text{h.c.},$$

onde:

- h.c.: Termos conjugados hermitianos explicitamente:

$$\text{h.c.} = -\bar{u}_R Y_u^\dagger (\phi^c)^\dagger Q_L - \bar{d}_R Y_d^\dagger \phi^\dagger Q_L - \bar{e}_R Y_e^\dagger \phi^\dagger L_L.$$

- $\phi^c = i\sigma^2 \phi^*$: Conjugado de carga do campo de Higgs.

4.2 Matrizes de Yukawa

As matrizes de Yukawa Y_u, Y_d, Y_e são parâmetros fundamentais que governam as interações de Yukawa entre os férmions e o campo de Higgs. Após a quebra espontânea de simetria eletrofraca, essas matrizes determinam as massas dos férmions.

4.2.1 Definição

As matrizes de Yukawa são matrizes 3×3 complexas que descrevem as interações de cada geração de férmions com o campo de Higgs. Antes da quebra de simetria, elas são representadas genericamente como:

$$Y_u = \begin{pmatrix} y_u & y_{uc} & y_{ut} \\ y_{cu} & y_c & y_{ct} \\ y_{tu} & y_{tc} & y_t \end{pmatrix}, \quad Y_d = \begin{pmatrix} y_d & y_{ds} & y_{db} \\ y_{sd} & y_s & y_{sb} \\ y_{bd} & y_{bs} & y_b \end{pmatrix}, \quad Y_e = \begin{pmatrix} y_e & y_{e\mu} & y_{e\tau} \\ y_{\mu e} & y_\mu & y_{\mu\tau} \\ y_{\tau e} & y_{\tau\mu} & y_\tau \end{pmatrix}.$$

4.2.2 Conexão com as Massas

Após a quebra de simetria pelo campo de Higgs, as matrizes de Yukawa se relacionam diretamente com as massas físicas dos férmions. As massas m_i de cada férmion são obtidas pelos autovalores das matrizes diagonalizadas:

$$Y_u \rightarrow \text{diag}(m_u, m_c, m_t), \quad Y_d \rightarrow \text{diag}(m_d, m_s, m_b), \quad Y_e \rightarrow \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau).$$

4.2.3 Hierarquia e Estrutura

As diferenças nas escalas das massas dos férmions refletem uma hierarquia nas constantes de Yukawa:

- Para os quarks u , c , e t : Os elementos de Y_u têm uma hierarquia, onde $y_t \gg y_c \gg y_u$, refletindo as massas crescentes dos quarks top, charm e up.
- Para os quarks d , s , e b : A hierarquia $y_b \gg y_s \gg y_d$ está associada às massas dos quarks bottom, strange e down.
- Para os léptons e , μ , e τ : A relação $y_\tau \gg y_\mu \gg y_e$ representa a hierarquia entre tau, múon e elétron.

4.2.4 Interpretação Física

- Os elementos fora da diagonal em Y_u, Y_d, Y_e estão relacionados à mistura entre os estados de sabor antes da diagonalização.
- As fases complexas em Y_u e Y_d são responsáveis pela violação de CP no setor quark.

5 Lagrangiana Completa do Modelo Padrão

A Lagrangiana do Modelo Padrão descreve as interações fundamentais dos campos de gauge, Higgs e férmions, incluindo termos cinéticos, de massa e de interação. Sua forma completa é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \underbrace{-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{\text{Gauge}}} \\
& + \underbrace{\sum_{\text{gerações}} \left(\bar{Q}_L i\gamma^\mu D_\mu Q_L + \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu d_R + \bar{L}_L i\gamma^\mu D_\mu L_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R \right)}_{\mathcal{L}_{\text{Férmions}}} \\
& + \underbrace{(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2}_{\mathcal{L}_{\text{Higgs}}} \\
& + \underbrace{-Y_u \bar{Q}_L \phi^c u_R - Y_d \bar{Q}_L \phi d_R - Y_e \bar{L}_L \phi e_R + \text{h.c.}}_{\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}} .
\end{aligned}$$

5.1 Componentes da Lagrangiana

- $\mathcal{L}_{\text{Gauge}}$: Termos cinéticos dos campos de gauge $G_{\mu\nu}^a, W_{\mu\nu}^i, B_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \\ W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned}$$

onde:

- $G_{\mu\nu}^a$: Tensor de campo dos glúons ($SU(3)_C$).
 - $W_{\mu\nu}^i$: Tensor de campo dos bósons de gauge associados ao $SU(2)_L$, com $i = 1, 2, 3$.
 - $B_{\mu\nu}$: Tensor de campo do bóson de gauge associado ao $U(1)_Y$.
- $\mathcal{L}_{\text{Férmions}}$: Termos cinéticos dos férmions com a derivada covariante antes da quebra de simetria:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a + ig \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i + ig' Y B_\mu,$$

onde:

- ∂_μ : Derivada parcial usual.
 - $g_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a$: Interação com os glúons (G_μ^a) do grupo $SU(3)_C$, onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann.
 - $g \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i$: Interação com os bósons de gauge W_μ^i associados ao $SU(2)_L$, onde σ^i são as matrizes de Pauli.
 - $g' Y B_\mu$: Interação com o bóson de gauge B_μ associado ao $U(1)_Y$, onde Y é a hipercarga.
- $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$: Termos associados ao campo de Higgs ϕ :

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2,$$

onde:

- $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi)$: Termo cinético do campo de Higgs, garantindo sua propagação.
- $+\mu^2 \phi^\dagger \phi$: Termo quadrático do potencial; com $\mu^2 > 0$, seu sinal positivo induz a instabilidade do vácuo trivial.
- $-\lambda (\phi^\dagger \phi)^2$: Termo de auto-interação quártica do campo de Higgs, responsável pela estabilização do potencial.

- $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$: Termos de interação Yukawa responsáveis pela geração das massas dos férmions após a quebra espontânea de simetria:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -Y_u \bar{Q}_L \phi^c u_R - Y_d \bar{Q}_L \phi d_R - Y_e \bar{L}_L \phi e_R + \text{h.c.},$$

onde:

- $Y_u \bar{Q}_L \phi^c u_R$: Termo responsável pelo acoplamento Yukawa dos quarks do tipo up ao campo de Higgs.
- $Y_d \bar{Q}_L \phi d_R$: Termo responsável pelo acoplamento Yukawa dos quarks do tipo down ao campo de Higgs.
- $Y_e \bar{L}_L \phi e_R$: Termo responsável pelo acoplamento Yukawa dos léptons carregados ao campo de Higgs.
- $\phi^c = i\sigma^2 \phi^*$: Conjugado de carga do campo de Higgs, utilizado no acoplamento dos quarks do tipo up.
- $\text{h.c.} = -\bar{u}_R Y_u^\dagger (\phi^c)^\dagger Q_L - \bar{d}_R Y_d^\dagger \phi^\dagger Q_L - \bar{e}_R Y_e^\dagger \phi^\dagger L_L$: Termos hermitianos conjugados que asseguram a invariância de gauge e completam o Lagrangiano de Yukawa.

Parte II

O Modelo Padrão Após a Quebra de Simetria

Após a quebra espontânea de simetria eletrofraca, o Modelo Padrão é reformulado para descrever os campos massivos e suas interações. Os setores abordados nesta parte incluem:

- **Setor Cinético e de Massas dos Campos de Gauge:** Detalha as lagrangianas dos campos de gauge, tensores de campo e as massas dos bósons resultantes da quebra de simetria.
- **Setor dos Campos Férmions:** Descreve os termos cinéticos e transformações de gauge dos férmions após a quebra de simetria.
- **Setor do Campo de Higgs:** Explora a auto-interação do Higgs, suas transformações de gauge, e os efeitos da quebra espontânea de simetria no modelo.
- **Interação do Higgs com os Campos de Gauge:** Aborda como o campo de Higgs interage com os bósons massivos $W^\pm$ e Z^0 .
- **Interação do Higgs com os Férmions:** Foca na origem das massas dos férmions, matrizes de Yukawa, e mistura entre sabores (matrizes CKM e PMNS).
- **Análise do Desacoplamento das Correntes:** Explica o desacoplamento do setor cinético e inclui cargas associadas e correntes.
- **Parâmetros Livres do Modelo Padrão:** Apresenta os parâmetros fundamentais relacionados aos bósons de gauge, campo de Higgs, e férmions, incluindo o impacto desses parâmetros.

Essa estrutura culmina com a lagrangiana completa do Modelo Padrão após a quebra espontânea de simetria, detalhando os componentes reorganizados e as propriedades físicas dos campos.

1 Setor Cinético e de Massas dos Campos de Gauge

1.1 Lagrangiana dos Campos de Gauge

A Lagrangiana para o setor cinético dos campos de gauge e as massas dos bósons após a quebra espontânea de simetria é dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu -} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu -} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu.$$

1.2 Tensores de Campo

Os tensores de campo associados a cada bóson são definidos como:

- $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$, representando os glúons ($SU(3)_C$).

– **Transformação de Gauge:**

$$G_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2} \rightarrow e^{i\theta_b(x)\frac{\lambda^b}{2}} \left(G_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2} \right) e^{-i\theta_b(x)\frac{\lambda^b}{2}}.$$

- $W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm$, para os bósons $W^\pm$, obtidos a partir das combinações

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2).$$

– **Transformação de Gauge:**

$$W_{\mu\nu}^\pm \rightarrow e^{\pm i\alpha(x)} W_{\mu\nu}^\pm.$$

- $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$, para o bóson Z^0 , com $Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu$, onde θ_W é o ângulo de Weinberg.

– **Transformação de Gauge:**

$$Z_{\mu\nu} \rightarrow Z_{\mu\nu}.$$

- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, para o fóton ($U(1)_{\text{em}}$), com $A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu$.

– **Transformação de Gauge:**

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}.$$

- Os campos individuais são relacionados por:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu,$$

onde θ_W é o ângulo de Weinberg.

– **Transformações de Gauge:**

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &\rightarrow e^{\pm i\alpha(x)} W_\mu^\pm, \\ Z_\mu &\rightarrow Z_\mu, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha_{\text{em}}(x). \end{aligned}$$

1.3 Massas dos Bósons

As massas dos bósons de gauge aparecem devido ao mecanismo de Higgs:

- $m_W^2 = \frac{1}{4}g^2v^2$, onde v é o valor esperado de vácuo do campo de Higgs.
- $m_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)v^2$.
- O fóton (A_μ) permanece sem massa.

Os valores das massas são dados por:

$$\begin{aligned} m_W &= \frac{1}{2}gv \approx 80.4 \text{ GeV}, \\ m_Z &= \frac{1}{2} \frac{gv}{\cos \theta_W} \approx 91.2 \text{ GeV}, \\ m_\gamma &= 0 \quad (\text{fóton sem massa}). \end{aligned}$$

A relação $m_W = m_Z \cos \theta_W$ é a expressão canônica do parâmetro $\rho = m_W^2/(m_Z^2 \cos^2 \theta_W) = 1$ em nível árvore, uma previsão altamente testada do MP.

2 Setor dos Campos Férmions

2.1 Lagrangiana dos Campos Férmions

Os férmions no Modelo Padrão possuem dinâmicas descritas pela Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}} = \sum_{\text{gerações}} \left(\bar{Q}_L i\gamma^\mu D_\mu Q_L + \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu d_R + \bar{L}_L i\gamma^\mu D_\mu L_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R \right),$$

onde:

- $Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$, $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$: Dubletos de quarks e léptons.
- u_R, d_R, e_R : Quarks e léptons direitos, representados como singletos sob $SU(2)_L$.
- $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$: O termo com a barra sobre o campo, como $\bar{Q}_L$, é a adjunta de Dirac do campo Q_L .

2.2 Derivada Covariante Após a Quebra de Simetria

A derivada covariante D_μ garante invariância de gauge sob $SU(3)_C \times U(1)_{\text{em}}$ após a quebra de simetria eletrofraca e é definida como:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a + i \frac{g}{\sqrt{2}} (T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-) + i \frac{g}{\cos \theta_W} (T_3 - \sin^2 \theta_W Q) Z_\mu + ieQ A_\mu.$$

2.2.1 Componentes da Derivada Covariante:

- ∂_μ : Derivada parcial usual que age em todos os campos.
- $g_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a$: Representa a interação com os glúons (G_μ^a) do $SU(3)_C$, onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann.
- $\frac{g}{\sqrt{2}} (T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-)$: Representa a interação com os bósons $W_\mu^\pm$.
- $\frac{g}{\cos \theta_W} (T_3 - \sin^2 \theta_W Q) Z_\mu$: Representa a interação com o bóson neutro Z_μ . O fator $(T_3 - \sin^2 \theta_W Q)$ é a carga de corrente neutra e reúne as contribuições de $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$ no novo autovetor de massa.
- $ieQ A_\mu$: Representa a interação com o campo eletromagnético A_μ , onde Q é a carga elétrica.

2.2.2 Significado de T^+ , T^- , e T_Z :

Os operadores T^+ , T^- , e T_Z são geradores das interações de gauge em $SU(2)_L$, definidos como:

$$T^+ = \frac{\sigma^1 + i\sigma^2}{2}, \quad T^- = \frac{\sigma^1 - i\sigma^2}{2}, \quad T_Z \equiv T_3 = \frac{\sigma^3}{2},$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli. Explicitamente,

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- T^+ e T^- : Operadores de Subida e Descida
 - T^+ : Promove transições entre estados de isospin, como $d_L \rightarrow u_L$ ou $e_L \rightarrow \nu_L$.
 - T^- : Promove transições opostas, como $u_L \rightarrow d_L$ ou $\nu_L \rightarrow e_L$.
- T_Z : Gerador Neutro
 - Atua sobre os estados de isospin:

$$T_Z \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_L \\ -\frac{1}{2}d_L \end{pmatrix}.$$

2.3 Transformações de Gauge dos Campos Após a Quebra de Simetria

Após a quebra espontânea de simetria eletrofraca, o grupo de simetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se reduz a $U(1)_{\text{em}}$, associado à invariância da carga elétrica. As transformações dos campos fermiônicos passam a ser determinadas pela carga elétrica Q , enquanto as interações fracas ainda ocorrem mediadas pelos bósons $W^\pm$ e Z^0 .

2.3.1 Quarks Esquerdos Q_L

- **Campo:** $Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$
- **Transformações:**
 - $SU(3)_C$: $Q_L \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} Q_L$.
 - $U(1)_{\text{em}}$: $Q_L \rightarrow e^{ieQ\alpha_{\text{em}}(x)} Q_L$, onde Q é a matriz de cargas elétricas:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- **Transformação Geral:**

$$Q_L \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} e^{ieQ\alpha_{\text{em}}(x)} Q_L.$$

2.3.2 Quarks Up Direitos u_R

- **Campo:** u_R
- **Transformações:**

- $SU(3)_C$: $u_R \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} u_R$.
- $U(1)_{\text{em}}$: $u_R \rightarrow e^{ieQ_u\alpha_{\text{em}}(x)} u_R$, onde $Q_u = \frac{2}{3}$ é a carga elétrica do quark up.

- **Transformação Geral:**

$$u_R \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} e^{ieQ_u\alpha_{\text{em}}(x)} u_R.$$

2.3.3 Quarks Down Direitos d_R

- **Campo:** d_R

- **Transformações:**

- $SU(3)_C$: $d_R \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} d_R$.
- $U(1)_{\text{em}}$: $d_R \rightarrow e^{ieQ_d\alpha_{\text{em}}(x)} d_R$, onde $Q_d = -\frac{1}{3}$ é a carga elétrica do quark down.

- **Transformação Geral:**

$$d_R \rightarrow e^{i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}} e^{ieQ_d\alpha_{\text{em}}(x)} d_R.$$

2.3.4 Léptons Esquerdos L_L

- **Campo:** $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$

- **Transformações:**

- $U(1)_{\text{em}}$: $L_L \rightarrow e^{ieQ\alpha_{\text{em}}(x)} L_L$, onde Q é a matriz de cargas elétricas:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- **Transformação Geral:**

$$L_L \rightarrow e^{ieQ\alpha_{\text{em}}(x)} L_L.$$

2.3.5 Léptons Direitos e_R

- **Campo:** e_R

- **Transformações:**

- $U(1)_{\text{em}}$: $e_R \rightarrow e^{ieQ_e\alpha_{\text{em}}(x)} e_R$, onde $Q_e = -1$ é a carga elétrica do elétron.

- **Transformação Geral:**

$$e_R \rightarrow e^{ieQ_e\alpha_{\text{em}}(x)} e_R.$$

3 Setor do Campo de Higgs

3.1 Lagrangiana do Campo de Higgs

A Lagrangiana descreve as dinâmicas e interações do campo de Higgs após a quebra espontânea de simetria eletrofraca. Inclui os termos cinéticos, de massa e de auto-interação do remanescente físico $\rho(x)$:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2} m_H^2 \rho^2 - \lambda v \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4,$$

onde:

- $\rho(x)$: O campo escalar físico do Higgs, remanescente após a quebra de simetria.
- v : Valor esperado no vácuo do campo de Higgs, definido por:

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}},$$

onde $\mu^2 > 0$ é o parâmetro associado à escala da quebra espontânea de simetria e $\lambda > 0$ controla a intensidade da auto-interação. Experimentalmente, $v \approx 246 \text{ GeV}$.

- λ : Constante de acoplamento do Higgs consigo mesmo. É responsável pela intensidade dos termos de auto-interação cúbico ($\lambda v \rho^3$) e quartico ($\frac{\lambda}{4} \rho^4$). No Modelo Padrão:

$$\lambda \approx 0.13.$$

Valores menores de λ podem indicar instabilidades no potencial do Higgs em escalas de alta energia.

- $m_H = \sqrt{2\lambda} v$: Massa do campo escalar físico do Higgs ($m_H \approx 125 \text{ GeV}$), equivalentemente $m_H^2 = 2\lambda v^2 = 2\mu^2$.

3.2 Modelo Padrão Após a Quebra Espontânea de Simetria

A quebra espontânea de simetria eletrofraca ocorre devido à forma do potencial do campo de Higgs:

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2,$$

onde $\mu^2 > 0$ é o parâmetro responsável por tornar o mínimo do potencial não trivial. Esse potencial leva o campo de Higgs ϕ , representado como um dublete complexo sob $SU(2)_L$,

a adquirir um valor esperado no vácuo (VEV):

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}.$$

3.2.1 Graus de Liberdade e Quebra de Simetria

Inicialmente, o campo de Higgs possui quatro graus de liberdade:

- Duas componentes reais associadas ao ϕ^+ (parte carregada).
- Duas componentes reais associadas ao ϕ^0 (parte neutra).

Após a quebra de simetria:

- Três graus de liberdade correspondentes a:
 - A parte imaginária de ϕ^0 : $\text{Im}(\phi^0)$.
 - As duas componentes de ϕ^+ .

Esses graus de liberdade tornam-se os bósons de Goldstone, que são "absorvidos" pelos campos de gauge $W^\pm$ e Z^0 , conferindo-lhes massa e transformando-os em partículas massivas.

- Um grau de liberdade físico remanescente:
 - A parte real de ϕ^0 ($\text{Re}(\phi^0)$) permanece como o campo físico $\rho(x)$, o bóson de Higgs.

3.2.2 Relação com o Parâmetro μ^2

O parâmetro μ^2 controla a forma do potencial $V(\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$:

- Para $\mu^2 < 0$, o potencial tem um único mínimo em $\phi = 0$, sem quebra de simetria.
- Para $\mu^2 > 0$, o potencial apresenta um mínimo não trivial em $\phi^\dagger\phi = \frac{\mu^2}{2\lambda}$, resultando em um valor esperado no vácuo $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$.

A escolha de $\mu^2 > 0$ é essencial para que o mecanismo de Higgs funcione, deslocando o mínimo do potencial e induzindo a quebra espontânea de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ para $U(1)_{\text{em}}$.

3.2.3 Resumo

- Graus de liberdade iniciais: Quatro componentes associadas ao campo de Higgs (ϕ^+ e ϕ^0).
- Bósons de Goldstone: Três graus de liberdade tornam-se os bósons de Goldstone, absorvidos pelos campos de gauge.
- Bóson de Higgs: Um grau de liberdade remanescente ($\rho(x)$) corresponde ao bóson de Higgs físico.
- Relação com μ^2 : O parâmetro $\mu^2 > 0$ define o mínimo do potencial e determina o valor esperado no vácuo, essencial para a quebra de simetria.

3.3 Termos de Auto-Interação do Higgs

Os termos de auto-interação do campo de Higgs, derivados da Lagrangiana após a quebra espontânea de simetria, descrevem como o bóson de Higgs interage consigo mesmo. Esses termos são fundamentais para entender as propriedades do campo de Higgs e testar o Modelo Padrão em experimentos de alta energia.

- $\lambda v \rho^3$:
 - Este termo é conhecido como interação cúbica. Ele descreve processos onde um único bóson de Higgs interage com dois outros bósons de Higgs.
 - É crucial para medir diretamente o potencial do campo de Higgs em experimentos, pois governa a taxa de processos como a produção de dois bósons de Higgs em colisores (processo de dupla produção de Higgs).
- $\frac{\lambda}{4} \rho^4$:
 - Este termo é chamado de interação quartica e descreve processos onde quatro bósons de Higgs interagem simultaneamente.
 - Este termo tem impacto em cenários de altíssima energia, influenciando a estabilidade do potencial do Higgs e fornecendo informações sobre a auto-interação do campo de Higgs a níveis mais profundos.

3.3.1 Importância Experimental

Esses termos de auto-interação são acessíveis em colisores como o LHC:

- Dupla produção de Higgs ($pp \rightarrow hh$):

- Governada pelo termo $\lambda v \rho^3$, essa produção envolve a interação cúbica e é uma assinatura direta da estrutura do potencial do Higgs.
- Interações quárticas:
 - Embora mais difíceis de acessar experimentalmente, as interações quárticas ($\frac{\lambda}{4}\rho^4$) impactam processos de alta energia e são relevantes para teorias além do Modelo Padrão, como a estabilidade do universo no vácuo do Higgs.

3.3.2 Estabilidade do Potencial do Higgs

Os termos de auto-interação também desempenham um papel importante na análise da estabilidade do potencial do Higgs:

$$V(\rho) = \frac{1}{2}m_H^2\rho^2 + \lambda v\rho^3 + \frac{\lambda}{4}\rho^4.$$

Se $\lambda > 0$, o potencial é estável e apresenta um mínimo em $\rho = 0$. No entanto, para valores pequenos de λ , podem surgir instabilidades em energias muito altas, sugerindo a necessidade de física além do Modelo Padrão.

3.4 Transformação de Gauge do Campo de Higgs Após a Quebra de Simetria

Após a quebra espontânea de simetria eletrofraca, o campo de Higgs reorganiza-se (no gauge unitário) como:

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix},$$

onde:

- v : Valor esperado no vácuo ($v \approx 246$ GeV).
- $\rho(x)$: O remanescente físico do campo de Higgs, identificado como o bóson de Higgs.

Os três graus de liberdade associados ao ϕ^+ e $\text{Im}(\phi^0)$ tornam-se os bósons de Goldstone, que são absorvidos pelos campos de gauge $W^\pm$ e Z^0 , conferindo-lhes massa. Apenas a simetria remanescente $U(1)_{\text{em}}$ afeta o sistema.

- **Campo:** $\rho(x)$
- **Transformações:**

- $SU(3)_C$: $\rho(x) \rightarrow \rho(x)$ (o campo de Higgs não interage com os glúons).
- $U(1)_{em}$: $\rho(x) \rightarrow \rho(x)$ (invariante sob a simetria eletromagnética).

- **Transformação Geral:**

$$\rho(x) \rightarrow \rho(x).$$

4 Interação do Higgs com os Campos de Gauge

4.1 Lagrangiana do Campo de Higgs com os Campos de Gauge

Após a quebra espontânea de simetria eletrofraca, o campo físico $\rho(x)$, remanescente do campo de Higgs, interage com os bósons massivos $W^\pm$ e Z^0 por meio dos termos derivados da Lagrangiana. Essa interação é descrita pela seguinte Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs-Gauge}} = [2m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + m_Z^2 Z_\mu Z^\mu] \frac{\rho}{v} \left(1 + \frac{\rho}{2v}\right),$$

onde:

- $m_W = \frac{1}{2}gv$: Massa do bóson $W^\pm$.
- $m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v$: Massa do bóson Z^0 .
- $\rho(x)$: O bóson de Higgs físico.
- v : Valor esperado no vácuo do campo de Higgs ($v \approx 246 \text{ GeV}$).

4.2 Origem do Fator $\frac{\rho}{v}$

O fator $\frac{\rho}{v}$ nas interações do Higgs com os bósons de gauge emerge diretamente da estrutura do campo de Higgs e da forma como ele adquire um valor esperado no vácuo (VEV) após a quebra espontânea de simetria eletrofraca. De fato, a partir do termo cinético $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi)$ com $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho \end{pmatrix}$, obtém-se

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \supset (m_W^2 W^+ W^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^2) \left(1 + \frac{\rho}{v}\right)^2,$$

de onde o fator ρ/v emerge naturalmente como a flutuação relativa em torno do vácuo.

4.2.1 Significado Físico de $\frac{\rho}{v}$

O fator $\frac{\rho}{v}$ tem um papel crucial:

- Interação Linear ($\frac{\rho}{v}$):
 - Relaciona diretamente a amplitude das flutuações do campo $\rho(x)$ com o VEV v , destacando a dependência das interações no estado de equilíbrio do campo de Higgs.
 - É essencial para processos onde o Higgs interage com um único bóson de gauge.
- Interação Quadrática ($\frac{\rho^2}{2v^2}$):
 - Indica a auto-interação do campo $\rho(x)$ por meio de sua conexão com os bósons massivos $W^\pm$ e Z^0 .
 - Este termo aparece em processos de alta energia, onde múltiplos bósons de Higgs estão envolvidos.
- Fator de Normalização: O fator v garante que as interações e massas estejam corretamente normalizadas de acordo com o valor do VEV, unificando a descrição do Higgs e dos bósons de gauge.

4.2.2 Impacto Teórico do Fator $\frac{\rho}{v}$

O fator $\frac{\rho}{v}$ encapsula a ideia de que as interações do campo de Higgs com os bósons de gauge dependem diretamente da escala de quebra de simetria v . Ele é uma manifestação do fato de que o Higgs não só dá massa aos bósons de gauge, mas também interage com eles como uma partícula física separada ($\rho(x)$).

Portanto:

- v : Determina a escala de interação e a força dos acoplamentos.
- $\rho(x)$: Representa as flutuações que interagem diretamente com os bósons de gauge.
- $\frac{\rho}{v}$: Relaciona essas flutuações à escala fundamental da quebra de simetria.

5 Interação do Higgs com os Férmions

O campo de Higgs é responsável pela geração de massa dos férmions no Modelo Padrão. Essa geração ocorre por meio de acoplamentos de Yukawa, que se manifestam tanto nos termos de massa quanto nas interações diretas entre o bóson de Higgs físico $\rho(x)$ e os férmions massivos.

5.1 Lagrangiana do Campo de Higgs com os Férmiões

A interação entre o Higgs e os férmions, incluindo os termos de massa e de acoplamento ao bóson físico, é descrita por:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs-Fermion}} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \left(1 + \frac{\rho}{v} \right),$$

onde:

- $m_{\alpha} = \frac{y_{\alpha} v}{\sqrt{2}}$: Massa do férmion α , determinada pelo acoplamento de Yukawa y_{α} e o valor esperado no vácuo (VEV) do Higgs (v).
- $\rho(x)$: Campo escalar físico do Higgs após a quebra de simetria.
- $v \approx 246 \text{ GeV}$: VEV do campo de Higgs.
- ψ_{α} : Campo de férmion correspondente.

O primeiro termo, $-m_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha}$, representa a massa do férmion; o segundo, $-\frac{m_{\alpha}}{v} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \rho$, descreve o vértice Yukawa $f\bar{f}H$ com acoplamento proporcional à massa do férmion.

5.2 Origem dos Termos de Massa

Antes da quebra de simetria, o acoplamento de Yukawa (para um único sabor, por simplicidade) é expresso como:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -y_{\alpha} \bar{\psi}_L \phi \psi_R + \text{h.c.},$$

onde ϕ é o campo de Higgs. Quando o campo de Higgs adquire um valor esperado no vácuo (VEV):

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix},$$

os termos de massa e interação emergem:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\frac{y_{\alpha} v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} - \frac{y_{\alpha}}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \rho(x).$$

O primeiro termo gera a massa $m_{\alpha} = \frac{y_{\alpha} v}{\sqrt{2}}$, enquanto o segundo termo descreve a interação do bóson de Higgs $\rho(x)$ com o férmion, com acoplamento m_{α}/v .

5.3 Diagonalização das Matrizes de Yukawa

As matrizes Y_u, Y_d, Y_e geralmente não são diagonais no espaço de sabor. Para identificar os acoplamentos escalares individuais y_f , essas matrizes devem ser diagonalizadas. Isso é feito por rotações unitárias (decomposição em valores singulares) nos campos quânticos:

$$Y_u = U_L^\dagger Y_u^{\text{diag}} U_R, \quad Y_d = D_L^\dagger Y_d^{\text{diag}} D_R, \quad Y_e = E_L^\dagger Y_e^{\text{diag}} E_R,$$

onde:

- Y^{diag} : Matrizes diagonalizadas de Yukawa (com entradas reais positivas).
- $U_L, U_R, D_L, D_R, E_L, E_R$: Matrizes unitárias que representam rotações nos espaços de sabor.

Os elementos diagonais dessas matrizes correspondem aos acoplamentos de Yukawa individuais:

$$y_u = (Y_u^{\text{diag}})_{ii}, \quad y_d = (Y_d^{\text{diag}})_{ii}, \quad y_e = (Y_e^{\text{diag}})_{ii}.$$

5.4 Mistura e Matrizes CKM e PMNS

A diagonalização das matrizes de Yukawa nos setores de quarks e léptons gera matrizes de mistura fundamentais, conhecidas como CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) para quarks e PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) para léptons. Essas matrizes descrevem a mistura entre os estados de sabor e massa, desempenhando um papel crucial nas interações fracas mediadas pelos bósons de gauge.

5.4.1 Relação entre Matrizes de Yukawa e as Matrizes CKM e PMNS

As matrizes de Yukawa Y_u, Y_d, Y_e , e Y_ν são responsáveis pelos acoplamentos de Yukawa antes da quebra de simetria. Após a diagonalização, as matrizes de mistura CKM e PMNS emergem das diferenças entre as rotações necessárias para alinhar os estados de sabor e os estados de massa:

- Para os quarks:

$$V_{\text{CKM}} = U_L^\dagger D_L,$$

onde U_L e D_L são as rotações unitárias que diagonalizam Y_u e Y_d , respectivamente:

$$Y_u^{\text{diag}} = U_L^\dagger Y_u U_R, \quad Y_d^{\text{diag}} = D_L^\dagger Y_d D_R.$$

- Para os léptons:

$$V_{\text{PMNS}} = E_L^\dagger N_L,$$

onde E_L e N_L são as rotações que diagonalizam Y_e e Y_ν , respectivamente:

$$Y_e^{\text{diag}} = E_L^\dagger Y_e E_L, \quad Y_\nu^{\text{diag}} = N_L^\dagger Y_\nu N_L.$$

Os elementos das matrizes CKM e PMNS resultam diretamente da diferença entre as rotações dos estados esquerdos dos quarks e léptons.

5.4.2 Matriz CKM: Mistura no Setor de Quarks

A matriz CKM descreve as transições entre os estados de sabor dos quarks up (u, c, t) e down (d, s, b) mediadas pelas interações fracas. Ela é definida como:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix},$$

onde V_{ij} representa a amplitude de transição entre um quark de tipo i e um de tipo j .

Propriedades da Matriz CKM

- Unitariedade:

$$V_{\text{CKM}} V_{\text{CKM}}^\dagger = I.$$

- Mistura entre sabores: Os elementos fora da diagonal descrevem a probabilidade de mistura entre quarks de diferentes gerações.
- Parametrização: Pode ser parametrizada em termos de três ângulos de mistura ($\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$) e uma fase de violação de CP (δ).

Relação com as Matrizes de Yukawa A matriz CKM surge diretamente da diferença entre as rotações U_L e D_L aplicadas para diagonalizar Y_u e Y_d . Se $U_L = D_L$, a matriz CKM seria a identidade, indicando ausência de mistura.

5.4.3 Matriz PMNS: Mistura no Setor de Léptons

A matriz PMNS descreve as transições entre os estados de sabor dos neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ) e os estados de massa (ν_1, ν_2, ν_3):

$$V_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}.$$

Propriedades da Matriz PMNS

- Unitariedade:

$$V_{\text{PMNS}} V_{\text{PMNS}}^\dagger = I.$$

- Oscilações de neutrinos: Descreve as probabilidades de oscilação entre os sabores de neutrinos durante a propagação.

Relação com as Matrizes de Yukawa A matriz PMNS surge da diferença entre E_L e N_L , que diagonalizam Y_e e Y_ν , respectivamente. A estrutura da matriz PMNS reflete o fenômeno de mistura significativa entre os sabores de neutrinos, ao contrário da matriz CKM, onde as misturas são pequenas.

5.4.4 Comparação entre CKM e PMNS

Característica	Matriz CKM	Matriz PMNS
Partículas	Quarks (u, c, t, d, s, b)	Léptons (e, μ, τ, ν)
Mistura	Pequena entre gerações	Grande entre gerações
Ângulos de Mistura	Pequenos ($\theta_{13} \approx 0.2^\circ$)	Grandes ($\theta_{12} \approx 34^\circ$)
Fase de CP	Observada experimentalmente	Ainda em investigação
Origem	Diferença entre U_L e D_L	Diferença entre E_L e N_L

Tabela 2: Comparação entre as matrizes CKM e PMNS.

5.4.5 Significado Físico

- Matriz CKM:
 - Descreve a violação de CP no setor de quarks.
 - Parametriza a hierarquia e a estrutura das interações fracas.
- Matriz PMNS:

- Explica as oscilações de neutrinos e a existência de massas não nulas.
- Fornece informações sobre a física além do Modelo Padrão.

5.5 Tabela de Massas e Acoplamentos de Yukawa dos Férmions

Os campos fermiônicos do Modelo Padrão, suas massas e os acoplamentos de Yukawa (y_f) são apresentados na tabela abaixo:

Campo	Massa (GeV)	y_f
u (Quark up)	$\approx 2.16 \times 10^{-3}$	$\approx 1.28 \times 10^{-5}$
c (Quark charm)	≈ 1.27	$\approx 7.34 \times 10^{-3}$
t (Quark top)	≈ 173	≈ 0.99
d (Quark down)	$\approx 4.18 \times 10^{-3}$	$\approx 2.2 \times 10^{-5}$
s (Quark strange)	$\approx 9.5 \times 10^{-2}$	$\approx 5.03 \times 10^{-4}$
b (Quark bottom)	≈ 4.18	$\approx 2.37 \times 10^{-2}$
e (Elétron)	$\approx 0.511 \times 10^{-3}$	$\approx 2.94 \times 10^{-6}$
μ (Múon)	≈ 0.105	$\approx 6.06 \times 10^{-4}$
τ (Tau)	≈ 1.777	$\approx 1.02 \times 10^{-2}$
$\nu_{e,\mu,\tau}$ (Neutrinos)	$< 1 \times 10^{-9}$	$< 4.07 \times 10^{-12}$

Tabela 3: Massas e acoplamentos de Yukawa (y_f) dos férmions do Modelo Padrão.

6 Análise do Desacoplamento das Correntes

Os termos de correntes apresentados a seguir não são adições isoladas à Lagrangiana, mas sim o resultado da expansão explícita do setor cinético dos férmions ($\mathcal{L}_{\text{Férmions}}$). Quando a derivada covariante D_μ atua sobre os campos fermiônicos, ela revela de forma natural as interações com os campos de gauge através das correntes carregadas, neutras e eletromagnéticas. Essa formulação isolada é extremamente útil para análises fenomenológicas e cálculo de taxas de decaimento.

6.1 Lagrangiana de Termos de Interação

As interações explicitadas dos férmions com os bósons de gauge no Modelo Padrão são descritas por:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ J^{+\mu} + W_\mu^- J^{-\mu}) + e A_\mu J^{\text{em}\mu} + \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu J^{\text{NC}\mu},$$

onde:

- $W_\mu^\pm$, A_μ , Z_μ : Campos de gauge associados aos bósons $W^\pm$, fóton e Z^0 .

- $J^{\pm\mu}$, $J^{\text{em}\mu}$, $J^{\text{NC}\mu}$: Correntes associadas às interações carregadas, eletromagnéticas e neutras, respectivamente.
- g , g' : Constantes de acoplamento dos grupos $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$.
- $e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$: Constante de acoplamento eletromagnético.

6.2 Definição de e : Constante Eletromagnética

A constante de acoplamento e é a carga elétrica elementar, relacionada às constantes de acoplamento g e g' do Modelo Padrão e ao ângulo de Weinberg (θ_W):

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W.$$

Ela define a intensidade das interações eletromagnéticas entre o fóton e os férmions carregados.

6.3 Cargas Associadas

6.3.1 Carga Elétrica (Q)

A carga elétrica determina a interação com o fóton A_μ e é definida como:

$$Q = T_3 + Y,$$

onde T_3 é a projeção do isospin fraco, e Y é a hipercarga do campo. Essa é a carga que governa as interações eletromagnéticas.

6.3.2 Carga Neutra (g_V, g_A)

A interação com o bóson Z^0 é convenientemente escrita em termos das cargas vetorial e axial:

$$g_V^f = T_3^f - 2Q_f \sin^2 \theta_W, \quad g_A^f = T_3^f,$$

de modo que o acoplamento $Z f \bar{f}$ aparece na forma $\bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f$. Essa carga descreve a intensidade das interações neutras e diferencia-se da carga elétrica devido à dependência em $\sin^2 \theta_W$.

6.4 Correntes Associadas

As correntes representam como os campos férmions interagem com os bósons mediadores das forças fundamentais.

6.4.1 Correntes Carregadas ($J^{\pm\mu}$)

$$J^{+\mu} = \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L, \quad J^{-\mu} = (J^{+\mu})^\dagger,$$

escritas equivalentemente em termos dos projetores quirais como $J^{+\mu} = \bar{u} \gamma^\mu P_L d + \bar{\nu} \gamma^\mu P_L e$.

Significado Físico:

- Descreve transições entre os componentes dos dubletos de isospin fraco mediadas pelos bósons $W^\pm$.
- Só partículas de quiralidade esquerda participam (estrutura V–A).
- Exemplos de transições:

$$u_L \leftrightarrow d_L, \quad \nu_L \leftrightarrow e_L.$$

6.4.2 Corrente Eletromagnética ($J^{\text{em}\mu}$)

$$J^{\text{em}\mu} = \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f,$$

onde ψ_f representa todos os férmions carregados e a soma corre sobre todos os sabores.

Significado Físico:

- Governa as interações eletromagnéticas mediadas pelo fóton A_μ .
- Conserva sabores (é diagonal no espaço de sabor):

$$u \rightarrow u, \quad e \rightarrow e.$$

- Acopla-se igualmente às componentes esquerda e direita (estrutura vetorial pura).

6.4.3 Corrente Neutra ($J^{\text{NC}\mu}$)

$$J^{\text{NC}\mu} = \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \left(T_3^f P_L - Q_f \sin^2 \theta_W \right) \psi_f = \frac{1}{2} \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) \psi_f.$$

Significado Físico:

- Atua em férmions carregados e neutros ($u, d, e, \nu, \dots$).
- Governa as interações mediadas pelo bóson Z^0 .
- Diferencia-se das interações eletromagnéticas devido à dependência em $\sin^2 \theta_W$, contendo componentes vetorial e axial.

6.5 Resumo das Correntes e Interações

Corrente	Férmions Afetados	Mediador	Natureza da Interação
Carregada ($J^{\pm\mu}$)	u_L, d_L, ν_L, e_L	$W^{\pm}$	V–A, troca de sabores
Eletromagnética ($J^{\text{em}\mu}$)	Férmions carregados	A_μ	Vetorial, conserva sabores
Neutra ($J^{\text{NC}\mu}$)	Todos os férmions	Z_μ	Vetorial+axial, diagonal em sabor

7 Parâmetros Livres do Modelo Padrão

O Modelo Padrão contém 19 parâmetros fundamentais que não podem ser derivados das teorias atuais, mas devem ser determinados experimentalmente. Esses parâmetros são divididos em categorias associadas aos setores do Modelo Padrão: os bósons de gauge, o campo de Higgs, os férmions e as interações de mistura.

7.1 Setor dos Bósons de Gauge

Os parâmetros associados ao setor dos bósons de gauge incluem as constantes de acoplamento dos grupos de simetria $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, e $U(1)_Y$:

- Constante de acoplamento de $SU(3)_C$ (interações fortes): $g_s \approx 1.217$.
- Constante de acoplamento de $SU(2)_L$ (interações fracas): $g \approx 0.652$.
- Constante de acoplamento de $U(1)_Y$ (hipercarga): $g' \approx 0.357$.

7.2 Setor do Campo de Higgs

O campo de Higgs tem dois parâmetros livres que governam suas propriedades e interações:

- Valor esperado no vácuo (VEV): $v \approx 246 \text{ GeV}$.
- Constante de auto-interação do Higgs: $\lambda \approx 0.129$.

Esses parâmetros determinam a massa do bóson de Higgs ($m_H = \sqrt{2\lambda}v \approx 125 \text{ GeV}$) e influenciam diretamente na geração de massa para os férmions e bósons de gauge.

7.3 Setor dos Férmions

As massas e misturas dos férmions do Modelo Padrão são descritas por 13 parâmetros relacionados aos acoplamentos de Yukawa e às matrizes de mistura:

- 9 acoplamentos de Yukawa (y_f):
 - Quarks up:
 - * $y_u \approx 1.28 \times 10^{-5}$.
 - * $y_c \approx 7.34 \times 10^{-3}$.
 - * $y_t \approx 0.99$.
 - Quarks down:
 - * $y_d \approx 2.2 \times 10^{-5}$.
 - * $y_s \approx 5.03 \times 10^{-4}$.
 - * $y_b \approx 2.37 \times 10^{-2}$.
 - Léptons carregados:
 - * $y_e \approx 2.94 \times 10^{-6}$.
 - * $y_\mu \approx 6.06 \times 10^{-4}$.
 - * $y_\tau \approx 1.02 \times 10^{-2}$.
- 4 parâmetros da matriz CKM:
 - Ângulos de mistura: $\theta_{12} \approx 13.1^\circ$, $\theta_{13} \approx 0.2^\circ$, $\theta_{23} \approx 2.4^\circ$.
 - Fase de violação de CP: $\delta_{\text{CP}} \approx 1.2 \text{ rad}$.

7.4 Definição do Ângulo de Weinberg

O ângulo de Weinberg (θ_W) é um parâmetro fundamental no Modelo Padrão, descrevendo a mistura entre os campos de gauge W_μ^3 (associado ao $SU(2)_L$) e B_μ (associado ao $U(1)_Y$). Ele é essencial para determinar as propriedades das interações fracas e eletromagnéticas.

Cálculo a partir das Constantes de Acoplamento: O ângulo de Weinberg é relacionado às constantes de acoplamento g' (associada ao $U(1)_Y$) e g (associada ao $SU(2)_L$) por:

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}}.$$

Alternativamente, ele pode ser expresso como:

$$\theta_W = \arctan \left(\frac{g'}{g} \right).$$

Mistura dos Campos de Gauge: Após a quebra espontânea de simetria, os campos físicos Z_μ e A_μ (fóton) surgem como combinações lineares dos campos de gauge W_μ^3 e B_μ :

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu.$$

Relação com a Carga Elétrica: A carga elétrica e é determinada a partir das constantes de acoplamento e do ângulo de Weinberg:

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W.$$

Aplicações do Ângulo de Weinberg:

- Correntes Neutras: Ele aparece explicitamente na definição das correntes neutras mediadas pelo bóson Z_μ :

$$J_\mu^{\text{NC}} = \bar{\psi} \gamma_\mu (T_3 P_L - Q \sin^2 \theta_W) \psi,$$

onde T_3 é a projeção do isospin fraco e $Q = T_3 + Y$ é a carga elétrica.

- Constante de Estrutura Fina: A constante de estrutura fina α é conectada ao ângulo de Weinberg pela relação:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad e = g \sin \theta_W.$$

Notação Alternativa: As constantes g' e g são frequentemente chamadas de g_1 e g_2 , respectivamente, dependendo da convenção adotada.

Categoria	Parâmetros Livres	Valores
Bósons de Gauge	g, g', g_s	$g \approx 0.652, g' \approx 0.357, g_s \approx 1.217$
Campo de Higgs	v, λ	$v \approx 246 \text{ GeV}, \lambda \approx 0.129$
Férmions (Yukawa)	$y_u, y_c, y_t, y_d, y_s, y_b, y_e, y_\mu, y_\tau$	Listados acima
Mistura (CKM)	$\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta_{\text{CP}}$	Listados acima

Tabela 4: Os 19 parâmetros livres do Modelo Padrão e seus valores experimentais.

7.5 Resumo dos Parâmetros Livres

7.6 Impacto dos Parâmetros Livres

Os 19 parâmetros livres do Modelo Padrão são determinados experimentalmente e influenciam diretamente as previsões teóricas:

- As constantes de acoplamento definem as forças fundamentais e seus alcances relativos.
- O VEV e λ determinam a escala de quebra de simetria eletrofraca e a massa do bóson de Higgs.
- Os acoplamentos de Yukawa determinam as massas dos férmions e suas interações com o campo de Higgs.
- Os parâmetros da matriz CKM descrevem as misturas e a violação de CP no setor dos quarks.

8 Lagrangiana Completa do Modelo Padrão

A Lagrangiana do Modelo Padrão descreve as interações fundamentais dos campos de gauge, Higgs e férmions, incluindo termos cinéticos, de massa e de interação. Sua forma completa após a quebra espontânea de simetria é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \underbrace{-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu -} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu -} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu}_{\mathcal{L}_{\text{Gauge}}} \\
& + \underbrace{\sum_{\text{gerações}} \left(\bar{Q}_L i\gamma^\mu D_\mu Q_L + \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu d_R + \bar{L}_L i\gamma^\mu D_\mu L_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R \right)}_{\mathcal{L}_{\text{Férmions}}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2}\partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2}m_H^2 \rho^2 - \lambda v \rho^3 - \frac{\lambda}{4}\rho^4}_{\mathcal{L}_{\text{Higgs}}} \\
& + \underbrace{\left[2m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu -} + m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \right] \frac{\rho}{v} \left(1 + \frac{\rho}{2v} \right)}_{\mathcal{L}_{\text{Higgs-Gauge}}} \\
& - \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha \left(1 + \frac{\rho}{v} \right)}_{\mathcal{L}_{\text{Higgs-Fermion}}}.
\end{aligned}$$

8.1 Componentes da Lagrangiana

- $\mathcal{L}_{\text{Gauge}}$: Termos cinéticos e de massa dos campos de gauge após a quebra espontânea de simetria eletrofraca:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \\
W_{\mu\nu}^\pm &= \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm, \\
Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.
\end{aligned}$$

onde:

- $G_{\mu\nu}^a$: Tensor de campo dos glúons ($SU(3)_C$).
- $W_{\mu\nu}^\pm$: Tensor de campo dos bósons $W^\pm$.
- $Z_{\mu\nu}$: Tensor de campo do bóson Z^0 .
- $F_{\mu\nu}$: Tensor de campo do fóton (A_μ).

Os campos individuais são relacionados por:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu,$$

onde θ_W é o ângulo de Weinberg.

Termos de massa para os bósons de gauge massivos:

$$\mathcal{L}_{\text{Mass}} = m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu,$$

onde as massas são dadas por:

$$m_W = \frac{1}{2} g v, \quad m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v.$$

- O campo A_μ (fóton) permanece sem massa devido à simetria $U(1)_{\text{em}}$.
- $\mathcal{L}_{\text{Férmions}}$: Termos cinéticos dos férmions com a derivada covariante após a quebra de simetria:

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a + i \frac{g}{\sqrt{2}} (T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-) + i \frac{g}{\cos \theta_W} (T_3 - \sin^2 \theta_W Q) Z_\mu + i e Q A_\mu,$$

onde:

- ∂_μ : Derivada parcial usual.
- $g_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a$: Interação com os glúons (G_μ^a) do grupo $SU(3)_C$.
- $\frac{g}{\sqrt{2}} (T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-)$: Interação com os bósons de gauge $W_\mu^\pm$.
- $\frac{g}{\cos \theta_W} (T_3 - \sin^2 \theta_W Q) Z_\mu$: Interação com o bóson neutro Z_μ , onde $\cos \theta_W$ é o cosseno do ângulo de Weinberg.
- $e Q A_\mu$: Interação com o campo eletromagnético A_μ , onde Q é a carga elétrica do férmion, e $e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$.
- $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$: Termos associados ao campo escalar físico ρ :

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2} m_H^2 \rho^2 - \lambda v \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4,$$

onde:

- $\frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho$: Termo cinético do campo escalar ρ , descrevendo sua propagação.
- $-\frac{1}{2} m_H^2 \rho^2$: Termo de massa, onde $m_H = \sqrt{2\lambda} v$ é a massa do bóson de Higgs.
- $-\lambda v \rho^3$: Termo de auto-interação cúbica, descrevendo interações entre um Higgs e dois outros.
- $-\frac{\lambda}{4} \rho^4$: Termo de auto-interação quártica, descrevendo interações entre quatro bósons de Higgs.
- $\mathcal{L}_{\text{Higgs-Gauge}}$: Interações entre o campo de Higgs e os bósons de gauge:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs-Gauge}} = [2m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + m_Z^2 Z_\mu Z^\mu] \frac{\rho}{v} \left(1 + \frac{\rho}{2v} \right),$$

onde:

- $2m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-}$: Termo que descreve a interação do Higgs com os bósons $W^\pm$.
 - $m_Z^2 Z_\mu Z^\mu$: Termo que descreve a interação do Higgs com o bóson Z^0 .
 - $\frac{\rho}{v}$: Fator de acoplamento proporcional ao valor esperado no vácuo v .
 - $(1 + \frac{\rho}{2v})$: Correção não-linear que reflete as auto-interações do Higgs no contexto das interações com os bósons de gauge.
- $\mathcal{L}_{\text{Higgs-Fermion}}$: Interação do Higgs com os férmions (incluindo os termos de massa):

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs-Fermion}} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \left(1 + \frac{\rho}{v}\right),$$

onde:

- m_{α} : Massa do férmion α , determinada pelo acoplamento de Yukawa correspondente.
- $\bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha}$: Termo bilinear que descreve o acoplamento do campo de Higgs com os férmions de Dirac.
- $(1 + \frac{\rho}{v})$: Fator que junta o termo de massa constante e a interação $f\bar{f}H$ com acoplamento m_{α}/v .

Parte III

Física de Sabor, Violação de CP e Bariogênese

1 Violação de CP, Matriz CKM e Bariogênese

A estrutura de sabor do Modelo Padrão — a existência de três gerações de quarks e léptons com massas e misturas hierárquicas — constitui uma de suas características mais misteriosas e fenomenologicamente ricas. O mecanismo CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa), proposto em 1973 como extensão natural da matriz de Cabibbo de 1963, fornece a **única fonte de violação de CP no setor de quarks do MP** e é responsável por um vasto programa experimental que inclui decaimentos de kaons e mésons B , oscilações de mésons neutros e, em princípio, a própria assimetria matéria-antimatéria do universo. Entretanto, como veremos, a violação de CP do MP é **insuficiente** por cerca de 10 ordens de magnitude para gerar a bariogênese observada — um dos indícios mais fortes de física além do MP.

1.1 A Matriz CKM: Origem e Estrutura

Na base de autoestados de gauge, o termo de Yukawa dos quarks é:

$$\mathcal{L}_Y^{\text{quark}} = -Y_{ij}^u \bar{Q}_L^i \tilde{H} u_R^j - Y_{ij}^d \bar{Q}_L^i H d_R^j + \text{h.c.},$$

onde $i, j = 1, 2, 3$ são índices de geração e $Y^{u,d}$ são matrizes 3×3 complexas arbitrárias. Após QES, surgem as matrizes de massa:

$$M_{ij}^u = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^u, \quad M_{ij}^d = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^d, \quad v \approx 246 \text{ GeV}.$$

Não são diagonais. A diagonalização requer transformações biunitárias:

$$M^u = U_L^u M_{\text{diag}}^u (U_R^u)^\dagger, \quad M^d = U_L^d M_{\text{diag}}^d (U_R^d)^\dagger.$$

Emergência da CKM. A corrente carregada (acoplamento $W^\pm$) em autoestados de gauge:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i W_\mu^+ + \text{h.c.}$$

Ao passar para autoestados de massa:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^{i,\text{mass}} \gamma^\mu \underbrace{(U_L^{u\dagger} U_L^d)_{ij}}_{V_{ij}^{\text{CKM}}} d_L^{j,\text{mass}} W_\mu^+ + \text{h.c.}$$

A matriz unitária $V^{\text{CKM}} = U_L^{u\dagger} U_L^d$:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}.$$

Cada V_{ij} mede a amplitude de transição entre quark tipo- u de geração i e quark tipo- d de geração j via $W^\pm$.

Mecanismo GIM: ausência de FCNC em árvore. Nas correntes neutras (Z), aparece $U_L^{u\dagger} U_L^u = \mathbb{1}$: **não há correntes neutras mudando sabor em nível árvore** (Glashow-Iliopoulos-Maiani 1970). Processos como $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ e $b \rightarrow s \gamma$ só ocorrem via loops, suprimidos — um teste crucial e bem-sucedido do MP.

1.2 Parâmetros Físicos: 3 Ângulos + 1 Fase

Uma matriz unitária 3×3 tem 9 parâmetros reais. Cinco são absorvidos em redefinições de fase dos quarks. Sobram:

$$\boxed{3 \text{ ângulos de mistura} + 1 \text{ fase física.}}$$

Essa fase é a **única fonte de violação de CP no setor de quarks do MP**. Para N gerações, o número de fases físicas é $(N-1)(N-2)/2$. Para $N=2$, zero fases: **é preciso ter três ou mais gerações para ter violação de CP**.

Esta foi a previsão ousada de Kobayashi-Maskawa em 1973 — *antes* das descobertas do charm (1974), bottom (1977) e top (1995). Nobel 2008.

1.3 Parametrização Padrão (PDG)

Três ângulos $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ e fase δ_{CP} :

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix},$$

com $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$. Valores PDG 2024:

$$\theta_{12} \approx 13.0^\circ, \quad \theta_{13} \approx 0.2^\circ, \quad \theta_{23} \approx 2.4^\circ, \quad \delta_{\text{CP}} \approx 69^\circ.$$

1.4 Parametrização de Wolfenstein

Wolfenstein (1983) explorou a hierarquia notável: V_{ij} diagonais ≈ 1 , transições entre gerações adjacentes $\sim \lambda$, entre geração 1-3 $\sim \lambda^3$, com $\lambda \approx 0.225 = \sin \theta_C$ (ângulo de Cabibbo):

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4).$$

Quatro parâmetros:

$$\lambda \approx 0.2251, \quad A \approx 0.826, \quad \rho \approx 0.159, \quad \eta \approx 0.348.$$

A violação de CP é codificada em $\eta \neq 0$. Utilidade: identificar rapidamente o elemento dominante em cada processo e organizar expansões em λ .

Problema do sabor. A hierarquia de CKM e de massas dos quarks ($m_t/m_u \sim 10^5$) **não tem explicação dentro do MP** — são 10 parâmetros livres medidos mas não preditos. Extensões (Froggatt-Nielsen, texturas, GUTs) tentam explicar, sem consenso. Um dos grandes problemas abertos.

1.5 O Triângulo Unitário

A unitariedade $V^\dagger V = \mathbb{I}$ produz seis equações de ortogonalidade:

$$\sum_k V_{ki} V_{kj}^* = 0, \quad i \neq j.$$

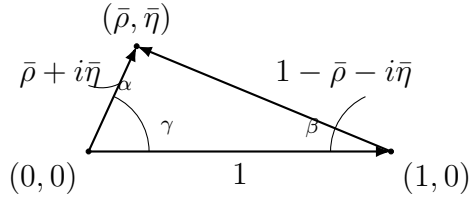
Cada equação é um triângulo no plano complexo. **Apenas um** tem lados comparáveis (os outros são degenerados em λ): o do setor B :

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0.$$

Normalizando por $V_{cd} V_{cb}^*$:

$$\underbrace{\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*}}_{\bar{\rho} + i\bar{\eta}} + 1 + \underbrace{\frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{cd} V_{cb}^*}}_{\approx 1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}} = 0,$$

com $\bar{\rho} \approx \rho(1 - \lambda^2/2)$, $\bar{\eta} \approx \eta(1 - \lambda^2/2)$.



Os três ângulos:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \phi_2 = \arg\left(-\frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{ud} V_{ub}^*}\right), \\ \beta &\equiv \phi_1 = \arg\left(-\frac{V_{cd} V_{cb}^*}{V_{td} V_{tb}^*}\right), \\ \gamma &\equiv \phi_3 = \arg\left(-\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*}\right), \end{aligned}$$

com $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Medidas independentes em processos distintos **devem fechar o triângulo** — esse é o teste de consistência mais preciso do paradigma CKM.

Valores experimentais (PDG 2024):

$$\sin(2\beta) = 0.698 \pm 0.014, \quad \gamma = (65.9 \pm 3.3)^\circ, \quad \alpha = (84.1 \pm 5)^\circ,$$

com soma consistente com 180° e vértice $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ convergente. **O triângulo fecha.** Grande triunfo do mecanismo CKM, confirmado por BaBar, Belle, CDF, D0, LHCb e Belle II.

1.6 Invariante de Jarlskog

Jarlskog (1985) mostrou que toda violação de CP invariante de fase da CKM é capturada por uma única quantidade:

$$J \equiv \text{Im}[V_{us} V_{cb} V_{ub}^* V_{cs}^*].$$

J é invariante sob redefinições de fase e tem interpretação geométrica como **duas vezes a área do triângulo unitário**:

$$|J| = 2 \times \text{Área}.$$

Experimentalmente:

$$J \approx (3.0 \pm 0.1) \times 10^{-5}.$$

A pequenez de J — apesar de δ_{CP} não ser pequeno — reflete a hierarquia: $J \sim s_{12} s_{13} s_{23} \sin \delta$. Será crucial para a discussão da bariogênese.

1.7 Violação de CP em Kaons

$K^0 - \bar{K}^0$ mixing. Os estados $K^0 = d\bar{s}$ e $\bar{K}^0 = s\bar{d}$ oscilam via diagramas de caixa com loops de u, c, t e $W^\pm$. Evolução descrita por hamiltoniana efetiva:

$$\mathcal{H} = M - \frac{i}{2}\Gamma,$$

com M, Γ hermitianas. Autoestados físicos:

$$|K_S\rangle = p|K^0\rangle + q|\bar{K}^0\rangle, \quad |K_L\rangle = p|K^0\rangle - q|\bar{K}^0\rangle,$$

com vidas médias $\tau_S \approx 0.9 \times 10^{-10}$ s e $\tau_L \approx 5.1 \times 10^{-8}$ s. Autoestados de CP seriam:

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \text{ (CP = +1)}, \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \text{ (CP = -1)}.$$

Descoberta de Cronin-Fitch (1964). Se CP fosse conservado, $K_1 = K_S$, $K_2 = K_L$. Como K_2 tem CP = -1, não poderia decair em $\pi\pi$ (CP = +1). Cronin-Fitch observaram:

$$K_L \rightarrow \pi^+\pi^-, \quad \text{BR} \approx 2 \times 10^{-3}.$$

Primeira evidência experimental de violação de CP. Nobel 1980. Interpretação:

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_2\rangle + \epsilon|K_1\rangle), \quad |\epsilon| \approx 2.23 \times 10^{-3}.$$

ϵ e ϵ' . Distinguem-se:

- ϵ : violação **indireta** (via mixing), independente do estado final.
- ϵ' : violação **direta** (na amplitude de decaimento), dependente do canal.

Medida experimental (NA48, KTeV, início 2000s):

$$\text{Re}(\epsilon'/\epsilon) = (1.66 \pm 0.23) \times 10^{-3},$$

confirmando violação direta de CP. Predição teórica em lattice QCD tem grandes incertezas hadrônicas, mas compatível.

1.8 Oscilações de Mésons Neutros

Para qualquer $P^0 - \bar{P}^0$ ($P \in \{K, D, B_d, B_s\}$), a probabilidade de sobrevivência é:

$$P(P^0 \rightarrow P^0; t) = \frac{e^{-\Gamma t}}{2} [\cosh(\Delta\Gamma t/2) + \cos(\Delta m t)],$$

com parâmetros adimensionais:

$$x = \frac{\Delta m}{\Gamma}, \quad y = \frac{\Delta\Gamma}{2\Gamma}.$$

$B^0 - \bar{B}^0$ ($b\bar{d}$). Diagramas de caixa dominados por top. No limite $m_t \gg m_W$:

$$\Delta m_d = \frac{G_F^2 m_W^2}{6\pi^2} m_{B_d} f_{B_d}^2 \hat{B}_{B_d} |V_{td} V_{tb}^*|^2 S_0(x_t),$$

com $S_0(x_t) \approx 2.4$ (função de Inami-Lim) e $\hat{B}_{B_d} f_{B_d}^2$ calculado em lattice. Medida:

$$\Delta m_d = (0.5065 \pm 0.0019) \text{ ps}^{-1}, \quad x_d \approx 0.77.$$

$B_s^0 - \bar{B}_s^0$. Análogo com $d \rightarrow s$, mais rápido por $|V_{ts}/V_{td}|^2 \approx 25$:

$$\Delta m_s = (17.765 \pm 0.006) \text{ ps}^{-1}, \quad x_s \approx 26.$$

Oscila $\sim 3 \times 10^{12}$ vezes por segundo! Descoberto no Tevatron (2006, CDF/D0), precisão espetacular no LHCb.

$K^0 - \bar{K}^0$. Oscilação descoberta em 1956 (Lande et al.). Caso especial: $\Delta\Gamma \approx 2\Gamma_S$ (porque $\Gamma_L \ll \Gamma_S$).

$D^0 - \bar{D}^0$. Observado em 2007 (BaBar, Belle). Muito lento ($x_D \sim 0.4\%$) por supressão GIM. Sonda sensível a nova física.

1.9 Assimetrias Dependentes do Tempo

Em decaimentos como $B^0 \rightarrow J/\psi K_S$ (canal de ouro):

$$A_{CP}(t) = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow f; t) - \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow f; t)}{\Gamma(B^0 \rightarrow f; t) + \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow f; t)} = \sin(2\beta) \sin(\Delta m_d t).$$

Acesso direto a $\sin(2\beta) = 0.699 \pm 0.017$. Canal limpo, dominado pela fase CKM — uma das medidas mais precisas da violação de CP.

1.10 Bariogênese: As Condições de Sakharov

A assimetria observada. O universo observável é dominado por matéria:

$$\eta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \approx 6 \times 10^{-10},$$

medido independentemente por nucleossíntese primordial (BBN), anisotropias do CMB (Planck) e formação de estrutura. Fato observacional robusto: **mais matéria que anti-matéria por fator $\sim 10^9$** .

Condições de Sakharov (1967). Três condições **necessárias** para gerar a assimetria dinamicamente a partir de condições simétricas:

1. **Violação do número bariônico B :** sem isso, $\eta_B = \text{constante}$.
2. **Violação de C e CP :** sem CP, cada processo $\Delta B > 0$ seria balanceado por seu conjugado-CP com taxa igual.
3. **Desvio do equilíbrio térmico:** em equilíbrio, $CPT \Rightarrow \langle B \rangle = 0$. Exige-se expansão rápida comparada às taxas de violação de B .

Bariogênese eletrofraca no MP: possibilidade teórica. O MP satisfaz, em princípio:

1. B : **sphalerons eletrofracos** (configurações clássicas não-perturbativas de $SU(2)$) violam $B + L$ a $T \sim 100$ GeV. Conservam $B - L$.
2. CP: matriz CKM, $J \sim 3 \times 10^{-5}$.
3. Desvio de equilíbrio: se a transição de fase eletrofraca fosse de **primeira ordem**, bolhas expandindo gerariam assimetria.

1.11 Por que o MP Falha

Falha 1: transição de fase eletrofraca não é de primeira ordem. Lattice QCD estabeleceu que para $m_H \geq 72$ GeV, a transição eletrofraca é um **crossover suave**. Como $m_H = 125$ GeV, **não há transição de primeira ordem no MP**. A condição 3 de Sakharov é inadequada.

Falha 2: violação de CP insuficiente. Mesmo se a condição 3 fosse ok, a assimetria escala com J . Estimativas detalhadas:

$$\eta_B^{\text{MP}} \sim \frac{J}{T_c^{12}} \times (\text{fatores de massa}) \sim 10^{-20},$$

vs. observado $\eta_B^{\text{obs}} \sim 10^{-10}$ — discrepância de **10 ordens de magnitude**. A fonte CKM é insuficiente.

1.12 Implicações: Nova Física Obrigatória

Essa falha é uma das evidências mais diretas de **física além do MP**. Alternativas:

Bariogênese eletrofraca estendida. SUSY, 2HDM: novos escalares tornam a transição de primeira ordem; novas fontes de violação de CP aumentam η_B .

Leptogênese (Fukugita-Yanagida 1986). Neutrinos pesados destrógiros (ver seção seguinte) decaem violando CP e L ; sphalerons convertem L em B . Cenário mais popular, elegante, liga bariogênese à massa dos neutrinos.

Outras. Bariogênese via áxions, matéria escura assimétrica, cordas cósmicas, etc.

Nenhuma confirmada. **Descobrir a origem da assimetria bariônica** permanece um dos principais objetivos da cosmologia e física de partículas.

2 Setor de Neutrinos e Matriz PMNS

No Modelo Padrão original (pré-1998), os neutrinos são estritamente sem massa: não há ν_R no espectro, e o mecanismo de Higgs não gera massa para ν_L . Essa previsão parecia confirmada até meados dos anos 1990. Mas em 1998, o experimento Super-Kamiokande (Japão) demonstrou inequivocamente **oscilações de neutrinos atmosféricos** — e oscilações só ocorrem se os neutrinos têm massa. Este foi o primeiro sinal direto e incontestável de **física além do Modelo Padrão**. Nobel 2015 (Kajita, McDonald).

Esta seção desenvolve: fenomenologia das oscilações, a matriz PMNS (análoga leptônica da CKM), a dicotomia Dirac vs. Majorana, o mecanismo seesaw como explicação natural para a pequenez das massas, o decaimento duplo beta sem neutrinos como sonda da natureza de Majorana, e a conexão com a leptogênese.

2.1 Oscilações de Neutrinos: Fenomenologia

Se os neutrinos têm massas m_1, m_2, m_3 distintas e os autoestados de massa $|\nu_i\rangle$ são combinações lineares dos autoestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ ($\alpha = e, \mu, \tau$):

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle,$$

então um neutrino produzido em sabor definido (ex.: ν_e em decaimento β) propaga-se como superposição de autoestados de massa com fases diferentes. Ao ser detectado, o sabor pode ser diferente — uma "oscilação" entre sabores. A probabilidade de transição $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ após propagar distância L com energia E é:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \left| \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} e^{-im_i^2 L/(2E)} \right|^2.$$

No caso simplificado de dois sabores com ângulo de mistura θ :

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right),$$

com $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. A oscilação depende de:

- **Ângulo de mistura** θ (amplitude da oscilação).
- **Diferença de massas quadradas** Δm^2 (frequência).
- **Razão** L/E (distância/energia).

Crucialmente: a oscilação requer $\Delta m^2 \neq 0$, o que implica **neutrinos têm massa**.

Em unidades práticas (L em km, E em GeV, Δm^2 em eV^2):

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(1.27 \frac{\Delta m^2[\text{eV}^2] L[\text{km}]}{E[\text{GeV}]}\right).$$

2.2 Efeito MSW: Oscilações em Matéria

No vácuo, as três oscilações são regidas apenas por U e Δm^2 . Ao atravessar matéria densa (sol, terra, supernova), os ν_e sentem um potencial adicional via espalhamento de corrente carregada com elétrons — o **efeito Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW)**:

$$V_{\text{CC}} = \sqrt{2} G_F n_e,$$

que modifica efetivamente os autoestados e pode gerar conversão ressonante:

$$\Delta m_{\text{eff}}^2 \cos 2\theta_{\text{eff}} = \Delta m^2 \cos 2\theta - 2E V_{\text{CC}}.$$

Quando $2E V_{\text{CC}} \approx \Delta m^2 \cos 2\theta$, há ressonância MSW: mesmo pequenos ângulos de vácuo produzem conversão completa. Foi o MSW que resolveu definitivamente o problema dos neutrinos solares: ν_e produzidos no núcleo solar são convertidos a ν_μ, ν_τ por ressonância MSW ao atravessar a densa matéria solar.

2.3 Evidências Experimentais

Neutrinos Solares (1968–2002). Raymond Davis observou desde 1968 um déficit de ν_e solares: $\sim 1/3$ do previsto pelo Modelo Solar Padrão. O "problema dos neutrinos solares" durou 30 anos. Experimentos subsequentes (Kamiokande, GALLEX/GNO, SAGE, Super-K, SNO) confirmaram o déficit. **SNO (2001)** foi decisivo: usando água pesada, mediu separadamente o fluxo de ν_e e o fluxo total $\nu_e + \nu_\mu + \nu_\tau$. O total concordava com o Modelo Solar; o déficit era apenas em ν_e . Prova definitiva de oscilação.

Neutrinos Atmosféricos (1998). Super-Kamiokande (50 kton de água) mediu ν_μ produzidos por raios cósmicos na atmosfera. Observou:

$$\frac{\text{Fluxo para cima}(\nu_\mu)}{\text{Fluxo para baixo}(\nu_\mu)} \approx 0.5,$$

em vez de 1. Neutrinos que viajaram ~ 13000 km (diâmetro da Terra) oscilaram; os que viajaram ~ 20 km não. Interpretação: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ com $\Delta m_{\text{atm}}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$.

Reatores e Aceleradores. Experimentos complementares precisaram os parâmetros:

- **KamLAND (2003):** $\bar{\nu}_e$ de reatores japoneses a $L \sim 180$ km, confirmando a solução solar.
- **K2K, MINOS, T2K, NO ν A:** ν_μ de aceleradores, medidas de Δm_{23}^2 e θ_{23} .
- **Daya Bay, RENO, Double Chooz (2012):** medida do "pequeno" θ_{13} via desaparecimento de $\bar{\nu}_e$ de reatores, abrindo a porta para medir δ_{CP} .

2.4 A Matriz PMNS

Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (1962): a matriz análoga à CKM no setor leptônico:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}}_{U_{\text{PMNS}}} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Parametrização padrão:

$$U_{\text{PMNS}} = R_{23}(\theta_{23}) R_{13}(\theta_{13}, \delta_{\text{CP}}) R_{12}(\theta_{12}) P_{\text{Maj}},$$

onde $P_{\text{Maj}} = \text{diag}(1, e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2})$ contém **duas fases adicionais de Majorana** (presentes somente se os neutrinos forem Majorana; não aparecem em CKM). Essas fases não afetam oscilações mas são cruciais para $0\nu\beta\beta$.

Valores experimentais (global fits 2024):

$$\theta_{12} \approx 33.4^\circ, \quad \theta_{23} \approx 49^\circ, \quad \theta_{13} \approx 8.6^\circ,$$

$$\Delta m_{21}^2 \approx 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \text{ (solar)},$$

$$|\Delta m_{31}^2| \approx 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \text{ (atmosférico)}.$$

A fase δ_{CP} tem indicação $\delta_{\text{CP}} \approx -90^\circ$ (T2K, NO ν A), com incerteza grande — objetivo central de DUNE e Hyper-K.

2.5 Comparação CKM vs. PMNS

Propriedade	CKM (quarks)	PMNS (léptons)
θ_{12}	13°	33°
θ_{23}	2.4°	49°
θ_{13}	0.2°	8.6°
Estrutura	Hierárquica (próxima à $\mathbb{K}$)	Quase-máximal em θ_{23}
δ_{CP}	69° (medido)	$\sim -90^\circ$ (indicativo)
Fases de Majorana	Não	Sim (se Majorana)

A estrutura é **radicalmente diferente**. Enquanto a CKM é hierárquica e próxima da identidade, a PMNS exhibe ângulos grandes, quase-máximos. Isso sugere **mecanismos físicos distintos** gerando as estruturas de sabor quark e leptônica — sem explicação dentro do MP.

2.6 Hierarquia de Massas: Normal vs. Invertida

Oscilações medem apenas $|\Delta m_{ij}^2|$, não os valores absolutos nem o sinal de Δm_{31}^2 . Duas possibilidades:

Hierarquia Normal (NH): $m_1 < m_2 < m_3$, com m_1 menor. Análoga aos quarks.

Hierarquia Invertida (IH): $m_3 < m_1 < m_2$, com m_3 menor.

Determinar a hierarquia é objetivo central da próxima década. Experimentos-chave:

- **DUNE** (Fermilab/SURF): $L = 1300$ km, sensível via efeitos de matéria.
- **Hyper-Kamiokande** (Japão): sucessor de Super-K, início 2027.
- **JUNO** (China): reator de alta precisão, medida via oscilações em vácuo.
- **ORCA, IceCube-PINGU**: atmosféricos em gelo/água.

Indícios atuais favorecem levemente NH, mas IH não está excluída.

2.7 Escala Absoluta de Massas

Oscilações não fixam escala absoluta. Limites vêm de:

- **KATRIN** (espectroscopia β do trítio): $m_\nu < 0.8$ eV (90% CL), projetado 0.2 eV.
- **Cosmologia** (Planck + BAO): $\sum m_\nu < 0.12$ eV via efeitos na formação de estrutura.
- $0\nu\beta\beta$ (se Majorana): via massa efetiva $m_{\beta\beta}$, discutida abaixo.

2.8 Dirac vs. Majorana: A Questão Fundamental

Para todos os outros férmions do MP, massa é gerada via Yukawa:

$$\mathcal{L} \supset -y_e \bar{L}_L H e_R + \text{h.c.} \xrightarrow{\text{SSB}} -\frac{y_e v}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R + \text{h.c.}$$

Isso requer ambos e_L (no dubleto) e e_R (singlete). É uma **massa de Dirac**.

Para neutrinos no MP original não existe ν_R ; sem ele, $\bar{\nu}_L \nu_R$ não pode ser escrito, e o Higgs não gera massa.

Opção 1 — Massa de Dirac (adicionar ν_R). Postula-se ν_R como singlete total de gauge (sem carga elétrica, sem isospin, sem cor):

$$\mathcal{L}_\nu^{\text{Dirac}} = -y_\nu \bar{L}_L \tilde{H} \nu_R + \text{h.c.},$$

com massa $m_\nu^D = y_\nu v / \sqrt{2}$. Conservação de número leptônico L é mantida.

Problema de naturalidade: $m_\nu \lesssim 1$ eV requer $y_\nu \lesssim 10^{-11}$, 10 ordens de magnitude menor que $y_e \sim 10^{-6}$ e $y_t \sim 1$. Hierarquia não explicada.

Opção 2 — Massa de Majorana. Majorana (1937): um férmion neutro pode ser sua própria antipartícula, $\psi^c = \psi$. Neutrinos (sem carga elétrica) permitem essa opção. A massa:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} m_M \bar{\nu}_L^c \nu_L + \text{h.c.},$$

com $\nu_L^c = C \bar{\nu}_L^T$. Esse termo **viola L por duas unidades**: $\Delta L = 2$.

Um termo Majorana para ν_L quebra $SU(2)_L \times U(1)_Y$. A única realização gauge-invariante é o **operador de dimensão 5 de Weinberg** (o único operador dim-5 do

MP):

$$\mathcal{L}_W^{d=5} = \frac{c_{ij}}{\Lambda} (\bar{L}_i^c \tilde{H}^*) (\tilde{H}^\dagger L_j) + \text{h.c.}$$

Após SSB, gera $m_\nu = c v^2 / \Lambda$. Com $v = 246$ GeV e $m_\nu \sim 0.05$ eV:

$$\Lambda \sim 10^{14} \text{ GeV}.$$

Uma **escala enorme**, próxima da escala de GUT — sinal inequívoco de nova física UV.

2.9 Mecanismo Seesaw

O operador de Weinberg emerge naturalmente ao integrar estados pesados. Três realizações ao nível de árvore (classificadas por Minkowski 1977; Gell-Mann, Ramond, Slansky 1979; Yanagida 1979; Mohapatra-Senjanovic 1980):

Seesaw Tipo I: Neutrinos Destrógiros Pesados. Adiciona-se N_R singleto de gauge:

$$\mathcal{L} = -y_\nu \bar{L}_L \tilde{H} N_R - \frac{1}{2} M_R \bar{N}_R^c N_R + \text{h.c.}$$

A matriz de massa na base (ν_L, N_R^c) :

$$\mathcal{M}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix}, \quad m_D = y_\nu v / \sqrt{2}.$$

Diagonalizando no limite $M_R \gg m_D$:

$$m_\nu^{\text{leve}} \approx -m_D^T M_R^{-1} m_D \approx -\frac{y_\nu^2 v^2}{2M_R}.$$

Fórmula do seesaw: quanto *mais pesado* N_R , *mais leve* o neutrino observado. Para $y_\nu \sim 1$ e $m_\nu \sim 0.05$ eV, $M_R \sim 10^{15}$ GeV — próximo da escala de GUT. Elegância notável.

Autoestados resultantes:

- 3 neutrinos leves (quase puros ν_L), massas $\sim m_D^2 / M_R$ — observados.
- 3 neutrinos pesados (quase puros N_R), massas $\sim M_R$ — inacessíveis diretamente.

Seesaw Tipo II: Tripleto Escalar. Adiciona-se tripleto escalar Δ com $Y = 1$:

$$\mathcal{L}_\Delta \supset -y_\Delta \bar{L}_L^c i\sigma_2 \Delta L_L + \text{h.c.}$$

Δ desenvolve VEV pequeno v_Δ (para não violar $\rho \approx 1$), e gera:

$$m_\nu = y_\Delta v_\Delta.$$

Prevê estados escalares exóticos (H^{++}, H^+, H^0) com assinaturas distintas no LHC.

Seesaw Tipo III: Tripleto Fermiônico. Adiciona-se tripleto fermiônico Σ com $Y = 0$. Produz efeitos análogos ao tipo I, mas com traços fenomenológicos distintos (mixing com léptons carregados).

2.10 Decaimento Duplo Beta sem Neutrinos ($0\nu\beta\beta$)

Se os neutrinos são Majorana (L violado em 2 unidades), um processo nuclear rarefeito torna-se possível:

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^-, \quad \Delta L = 2.$$

Sem emissão de antineutrinos! O processo ordinário $2\nu\beta\beta$ (que é observado, $\Delta L = 0$) tem antineutrinos emitidos. O $0\nu\beta\beta$ é a **única via experimental** para:

1. Confirmar a natureza Majorana dos neutrinos.
2. Medir a fase de Majorana combinada.
3. Sondar a escala absoluta de massa via massa efetiva.

Massa efetiva de Majorana:

$$m_{\beta\beta} = \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right| = \left| c_{12}^2 c_{13}^2 m_1 + s_{12}^2 c_{13}^2 e^{i\alpha_1} m_2 + s_{13}^2 e^{i\alpha_2} m_3 \right|.$$

A taxa do $0\nu\beta\beta$ é:

$$\Gamma_{0\nu} = G^{0\nu} |\mathcal{M}^{0\nu}|^2 m_{\beta\beta}^2,$$

com $G^{0\nu}$ fator de espaço de fase e $\mathcal{M}^{0\nu}$ elemento de matriz nuclear (calculado em estruturas nucleares, com incertezas significativas).

Experimentos atuais e projetados:

- **KamLAND-Zen** (Japão, ^{136}Xe): $T_{1/2}^{0\nu} > 2.3 \times 10^{26}$ anos, $m_{\beta\beta} < 36\text{--}156$ meV.
- **GERDA/LEGEND** (Itália, ^{76}Ge).

- **CUORE/CUPID** (Itália, ^{130}Te , ^{100}Mo).
- **nEXO, LEGEND-1000**: próxima geração, sensibilidade projetada $m_{\beta\beta} \sim 10$ meV.

Se hierarquia invertida for confirmada e $0\nu\beta\beta$ não for detectado em LEGEND-1000, **neutrinos seriam Dirac** — uma descoberta monumental.

2.11 Leptogênese: Conexão com a Bariogênese

Fukugita-Yanagida (1986) propuseram que a assimetria bariônica do universo tem origem *leptônica*. No seesaw tipo I, os N_R pesados decaem no universo primordial via:

$$N_R \rightarrow L_L + H, \quad N_R \rightarrow \bar{L}_L + H^*.$$

Se os acoplamentos Yukawa y_ν são complexos, as taxas de decaimento em léptons vs. antiléptons diferem — **violação de CP leptônica**. Isso gera uma assimetria leptônica $Y_L = (n_L - n_{\bar{L}})/s$.

Os **sphalerons eletrofracos** (processos não-perturbativos que violam $B + L$ mas conservam $B - L$, ativos a $T \gtrsim 100$ GeV) convertem parcialmente essa assimetria leptônica em assimetria bariônica:

$$Y_B = \frac{28}{79} Y_{B-L} = -\frac{28}{51} Y_L \text{ (inicial)}.$$

Elegância do cenário. A leptogênese conecta **três fatos aparentemente não-relacionados**:

1. Massas pequenas dos neutrinos $\Rightarrow$ seesaw $\Rightarrow N_R$ pesado.
2. Violação de CP no setor leptônico $\Rightarrow$ fase de δ_{CP} (em princípio medível em DUNE).
3. Assimetria matéria-antimatéria do universo.

É atualmente o cenário mais popular para bariogênese, embora a verificação experimental direta seja extraordinariamente difícil (requer acessar N_R ou violação de CP Majorana).

2.12 Síntese: Neutrinos Como Janela Para Nova Física

Os neutrinos oferecem a primeira e mais clara janela experimental para física além do MP:

- Oscilações $\Rightarrow$ **massa** $\neq 0$ (comprovada).

- Pequenez das massas $\Rightarrow$ **escala UV** $\sim 10^{14}$ GeV (indireto).
- Natureza Dirac ou Majorana $\Rightarrow$ **estrutura fundamental** (em investigação).
- Possível papel em leptogênese $\Rightarrow$ origem da matéria (teórico).
- $\delta_{\text{CP}} \neq 0 \Rightarrow$ nova violação de CP (sendo medida).

A próxima década (DUNE, Hyper-K, JUNO, LEGEND, KATRIN) deve responder à hierarquia, fixar δ_{CP} , e potencialmente determinar a natureza Majorana — transformando nossa compreensão do MP estendido.

Parte IV

Formalismo da Teoria Quântica de Campos

Esta parte apresenta o formalismo matemático que conecta a Lagrangiana do Modelo Padrão às previsões experimentais: a quantização por integral de caminho, soluções não-perturbativas, as funções de Green e a fórmula de redução LSZ.

1 Fundamentos Teóricos: Da Integral de Caminho à Matriz S

Antes de construirmos os diagramas, é crucial entender o elo entre a teoria quântica de campos e os dados experimentais obtidos em colisores de partículas. Esse elo é estruturado através do formalismo da Integral de Caminho, das Funções de Green, da Fórmula de Redução LSZ e da Matriz S .

2 Quantização por Integral de Caminho

A formulação de Feynman em integrais de caminho é o formalismo mais poderoso e versátil da teoria quântica de campos moderna. Diferente da quantização canônica (que privilegia o tempo e requer ordenamento cuidadoso de operadores), a integral de caminho é **manifestamente Lorentz-covariante**, lida naturalmente com simetrias de gauge e, crucialmente, é a única via sistemática de acesso a fenômenos **não-perturbativos** — tunelamento, instantons, solitons, quebra dinâmica de simetria, confinamento.

2.1 A Integral de Caminho e o Funcional Gerador

Na formulação de Feynman, a amplitude de transição de um estado $|\phi_a, t_a\rangle$ a $|\phi_b, t_b\rangle$ é dada pela soma sobre todas as histórias:

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \int_{\phi(t_a)=\phi_a}^{\phi(t_b)=\phi_b} \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]/\hbar},$$

onde $S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}$ é a ação clássica. Cada história é ponderada pela fase $e^{iS/\hbar}$, e a interferência entre as infinitas trajetórias produz os resultados quânticos. Na QFT, essa ideia se generaliza diretamente para campos e toda a dinâmica é codificada no **funcional gerador**:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J(x)\phi(x)) \right],$$

onde $\mathcal{D}\phi$ representa a integração sobre todas as configurações possíveis dos campos, e $J(x)$ é uma fonte externa. Ao derivar funcionalmente em relação a $J(x)$ obtêm-se todas as funções de correlação do vácuo. A expansão perturbativa em torno de uma teoria livre é apenas uma das muitas maneiras de extrair informação desse funcional; trajetórias de ação estacionária não-trivial (pontos de sela) capturam a física não-perturbativa.

2.2 Campo Escalar Livre: Cálculo Explícito

Considere um campo escalar real $\phi(x)$ com Lagrangiana livre

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

O funcional gerador livre é

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(m^2 - i\epsilon)\phi^2 + J\phi \right] \right\}.$$

A prescrição $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ garante a convergência do integrando oscilatório e seleciona o propagador de Feynman causal. Integrando por partes e completando o quadrado, obtém-se a forma fechada:

$$Z_0[J] = Z_0[0] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right\},$$

onde o **propagador de Feynman** é

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Este propagador satisfaz $(\square_x + m^2)\Delta_F(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y)$ e é o bloco construtivo fundamental para todas as funções de Green da teoria livre.

2.3 Teoria com Interações

Para uma Lagrangiana completa $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$, o funcional gerador admite a representação formal:

$$Z[J] = \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right\} Z_0[J].$$

Expandindo a exponencial em série de potências, cada termo corresponde a um conjunto de diagramas de Feynman com um número fixo de vértices. Esta é a **base da teoria de perturbações** e das regras de Feynman.

2.4 Campos Fermiônicos e Variáveis de Grassmann

Para campos fermiônicos $\psi(x), \bar{\psi}(x)$, a estatística de Fermi-Dirac requer **variáveis anti-comutantes** (Grassmann):

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = 0, \quad \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = 0.$$

As regras de integração de Grassmann (Berezin) são:

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\theta \theta = 1, \quad \int d\bar{\theta} d\theta e^{-\bar{\theta} M \theta} = \det M.$$

(Note: para variáveis bosônicas, a mesma integral gaussiana produziria $(\det M)^{-1}$. O sinal oposto do expoente é a origem do fator (-1) em loops fermiônicos fechados.)

O funcional gerador para férmions livres, com fontes anticomutantes $\eta, \bar{\eta}$, é:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta] \right\}.$$

O resultado da integração gaussiana Grassmann:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \det(i\cancel{\partial} - m) \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x - y) \eta(y) \right\},$$

com o **propagador de Dirac**

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x - y)}.$$

2.5 Campos de Gauge: Procedimento de Faddeev-Popov

Para teorias de gauge, uma quantização ingênua falha porque a integral $\int \mathcal{D}A e^{iS_{\text{YM}}[A]}$ diverge: o integrando é constante ao longo das órbitas de gauge. A solução de Faddeev-Popov é:

Passo 1: Fixação de Gauge. Escolhe-se $F(A) = 0$ (ex.: $F = \partial^\mu A_\mu^a$) e insere-se a identidade

$$1 = \Delta_{\text{FP}}[A] \int \mathcal{D}\alpha \delta(F(A^\alpha)), \quad \Delta_{\text{FP}}[A] = \det\left(\frac{\delta F(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right).$$

Passo 2-3: Gauge R_ξ . A delta é generalizada para uma gaussiana, produzindo o termo

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2.$$

Passo 4: Fantasmas. O determinante Δ_{FP} é reescrito via escalares anticomutantes $c^a, \bar{c}^a$:

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = -\bar{c}^a (\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b, \quad D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c.$$

O funcional gerador quantizado consistentemente é:

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}}] \right\}.$$

3 Rotação de Wick e Integral de Caminho Euclidiana

A integral de caminho em Minkowski, $Z \sim \int \mathcal{D}\phi e^{iS/\hbar}$, é **oscilatória**: o integrando tem módulo unitário em todas as configurações. A convergência é delicada (garantida apenas pela prescrição $+i\epsilon$) e as técnicas numéricas (Monte Carlo) são impraticáveis devido ao *sign problem*. A **rotação de Wick** é a ponte entre a mecânica quântica e a mecânica estatística clássica e, ao mesmo tempo, a ferramenta técnica que torna a integral de caminho convergente e tratável.

3.1 A Rotação no Plano Complexo do Tempo

A rotação de Wick consiste na prescrição de **continuação analítica do tempo**:

$$t \longrightarrow -i\tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

equivalentemente $x^0 \rightarrow -ix_E^0$, de modo que as componentes espaciais permanecem reais. A métrica se transforma:

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 \longrightarrow -(d\tau^2 + d\vec{x}^2) = -ds_E^2,$$

ou seja, o espaço-tempo **Lorentziano** $(+, -, -, -)$ torna-se **Euclidiano** $(+, +, +, +)$. O grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ é substituído pelo grupo de rotações $SO(4)$.

3.2 Transformação da Ação

Para um campo escalar, a ação em Minkowski

$$S_M = \int dt d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right]$$

transforma-se, sob $t = -i\tau$, $\partial_t = i\partial_\tau$, $dt = -i d\tau$, em

$$S_M \longrightarrow i \int d\tau d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right] = iS_E,$$

onde

$$S_E[\phi] = \int d^4x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu^E \phi)(\partial_\mu^E \phi) + V(\phi) \right]$$

é a **ação euclidiana**, com derivadas todas de sinal positivo (produto escalar euclidiano). Note a mudança fundamental: enquanto S_M tem sinal indefinido (termo cinético menos potencial), S_E é **limitada inferiormente** (soma de termos positivos, para $V \geq 0$).

3.3 O Funcional Gerador Euclidiano

A rotação de Wick transforma o fator oscilatório em um peso de Boltzmann:

$$e^{iS_M/\hbar} \longrightarrow e^{-S_E/\hbar}.$$

O funcional gerador euclidiano é:

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x_E [\mathcal{L}_E(\phi) - J\phi] \right\}.$$

Esta é uma integral **absolutamente convergente** (para V inferiormente limitado), matemática e numericamente bem definida. O propagador euclidiano torna-se:

$$\Delta_E(x - y) = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_E \cdot (x-y)_E}}{k_E^2 + m^2},$$

com $k_E^2 = k_0^2 + \vec{k}^2 > 0$ estritamente positivo — não há mais polos reais, não há necessidade de prescrição $i\epsilon$.

3.4 Conexão com Mecânica Estatística: Partição de Boltzmann

A analogia é profunda e exata. A integral de caminho euclidiana

$$Z_E = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]/\hbar}$$

é **formalmente idêntica** à função de partição de um sistema estatístico clássico em $d+1$ dimensões:

$$Z_{\text{stat}} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\beta H[\phi]}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

A identificação é $\hbar \leftrightarrow k_B T$: **a integral de caminho euclidiana de uma QFT em d dimensões é a mecânica estatística clássica em $d+1$ dimensões**. Essa correspondência tem consequências operacionais imensas:

- Permite simulações numéricas de QCD via **lattice QCD**, onde o espaço-tempo é discretizado em uma rede hipercúbica 4D e os campos amostrados por Monte Carlo segundo e^{-S_E} — impossível em Minkowski por causa da oscilação.
- Fornece uma **classificação unificada das transições de fase** em sistemas quânticos e estatísticos, via grupo de renormalização.
- Explica por que fenômenos críticos em matéria condensada e QFT compartilham expoentes universais (universalidade de Wilson-Fisher).

3.5 Temperatura Finita: Tempo Imaginário Periódico

Uma extensão crucial: ao impor que o tempo euclidiano seja **periódico**, $\tau \in [0, \beta]$, com condições de contorno apropriadas aos campos:

$$\phi(\tau + \beta, \vec{x}) = +\phi(\tau, \vec{x}) \quad (\text{bósons}), \quad \psi(\tau + \beta, \vec{x}) = -\psi(\tau, \vec{x}) \quad (\text{férmions, KMS}),$$

o funcional Z_E torna-se a **função de partição térmica** $Z(\beta) = \text{tr } e^{-\beta H}$ da QFT:

$$Z(\beta) = \int_{\text{periódicas}} \mathcal{D}\phi e^{-S_E^{\text{periódica}}[\phi]}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

O tempo euclidiano é agora compactificado em um círculo de circunferência β . Momentos no círculo são **frequências de Matsubara**:

$$\omega_n^{\text{bos}} = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad \omega_n^{\text{ferm}} = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}.$$

Essa formulação é a base do estudo de QCD a temperatura finita (plasma quark-glúon no universo primordial e em colisões de íons pesados no LHC), da eletroweak baryogenesis, e da transição de fase quiral.

4 Aproximação do Ponto de Sela e a Expansão Semi-clássica

Na integral euclidiana $Z_E = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]/\hbar}$, no limite $\hbar \rightarrow 0$ o integrando é dominado por **configurações de ação estacionária**:

$$\left. \frac{\delta S_E}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi_c} = 0,$$

que são as **equações de Euler-Lagrange euclidianas**. Expandindo em flutuações $\phi = \phi_c + \eta$:

$$Z_E \approx \sum_{\phi_c} e^{-S_E[\phi_c]/\hbar} \left[\det \left(\left. \frac{\delta^2 S_E}{\delta \phi^2} \right|_{\phi_c} \right) \right]^{-1/2} \times [1 + \mathcal{O}(\hbar)].$$

A expansão é organizada em potências de $\hbar$:

- **Ordem árvore (clássica)**: $e^{-S_E[\phi_c]/\hbar}$ — captura a contribuição do ponto de sela.
- **Um loop**: o determinante — correções quânticas das flutuações gaussianas.
- **Ordens superiores**: vértices das flutuações produzem diagramas de loop ordinários.

O ponto crucial: quando $\phi_c \neq 0$ é uma solução **não-trivial** da equação clássica (um **instanton** ou **soliton**), seu fator $e^{-S_E[\phi_c]/\hbar}$ tem a forma

$$e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} = e^{-\text{constante}/g^2},$$

que é **não-analítica em g** ao redor de $g = 0$ — impossível de reproduzir em qualquer ordem finita da teoria de perturbações. Estes efeitos são genuinamente **não-perturbativos**.

5 Soluções Não-Perturbativas: Instantons

Instantons são soluções clássicas das equações de movimento **euclidianas** que:

1. São localizadas no espaço e no tempo euclidiano (daí o nome: existem em um "instante").
2. Têm ação finita $S_E[\phi_{\text{inst}}] < \infty$.
3. Conectam diferentes vácuos da teoria (topologicamente distintos).
4. Descrevem **tunelamento quântico** entre esses vácuos.

5.1 Exemplo Pedagógico: Potencial de Duplo Poço em QM

Considere uma partícula em 1D com potencial $V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2$. Classicamente, há dois mínimos degenerados em $x = \pm a$. Quanticamente, o tunelamento entre eles divide os níveis em dubletos (*splitting*). A amplitude de tunelamento é calculada no formalismo euclidiano:

$$\langle +a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x]/\hbar},$$

onde $S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right]$.

A equação clássica euclidiana $\ddot{x} = V'(x)$ é idêntica à equação de movimento em Minkowski com **potencial invertido** $-V(x)$. Uma partícula clássica em $-V$ pode rolar de $+a$ a $-a$ em tempo infinito, e essa trajetória é o **instanton**:

$$x_{\text{inst}}(\tau) = a \tanh[\omega(\tau - \tau_0)/2], \quad \omega = 2a\sqrt{2\lambda}.$$

Sua ação euclidiana é finita:

$$S_E^{\text{inst}} = \int_{-a}^{+a} dx \sqrt{2V(x)} = \frac{2}{3} \omega a^2 = \frac{4\sqrt{2\lambda} a^3}{3}.$$

A contribuição do instanton ao splitting é $\Delta E \sim \hbar \omega e^{-S_E^{\text{inst}}/\hbar}$ — exponencialmente suprimida, totalmente invisível em qualquer ordem de $\hbar$.

5.2 Instantons em Yang-Mills: BPST

A descoberta histórica (Belavin, Polyakov, Schwarz, Tyupkin 1975): as equações de Yang-Mills euclidianas em $SU(N)$ admitem soluções de ação finita. O ponto de partida é a

desigualdade:

$$S_E = \frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \geq \frac{1}{4g^2} \left| \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{\mu\nu a} \right| = \frac{8\pi^2}{g^2} |Q|,$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ e

$$Q = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{\mu\nu a} \in \mathbb{Z}$$

é a **carga topológica** (número de Pontryagin), um invariante homotópico que classifica as configurações de gauge em classes topológicas distintas. A desigualdade é saturada quando o campo é **(anti-)autodual**:

$$F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}_{\mu\nu}.$$

A solução BPST com $Q = 1$ em $SU(2)$ é:

$$A_\mu^a(x) = \frac{2\eta^{a\mu\nu}(x-x_0)_\nu}{(x-x_0)^2 + \rho^2},$$

onde $\eta^{a\mu\nu}$ são os **símbolos de 't Hooft**, x_0 é a posição do instanton, e ρ é seu tamanho (modulus livre). A ação é:

$$S_E^{\text{BPST}} = \frac{8\pi^2}{g^2}.$$

A amplitude de tunelamento entre vácuos topologicamente distintos é

$$\mathcal{A} \sim e^{-8\pi^2/g^2},$$

suprimida para acoplamentos pequenos — **nunca aparece em teoria de perturbações em g .**

5.3 Vácuo θ e o Problema de CP Forte

Instantons revelam que o vácuo da QCD **não é único**. Há infinitos vácuos $|n\rangle$ ($n \in \mathbb{Z}$) classificados pela carga topológica, e o verdadeiro vácuo é uma superposição:

$$|\theta\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} |n\rangle,$$

parametrizada por um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$. Esse "vácuo θ " equivale a adicionar à Lagrangiana da QCD o termo topológico:

$$\mathcal{L}_\theta = \theta \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a},$$

que **viola CP**. Medidas do momento de dipolo elétrico do nêutron impõem $|\theta| < 10^{-10}$: eis o **problema de CP forte**. Não há razão dentro do MP para θ ser tão pequeno. A solução mais popular (Peccei-Quinn) promove θ a um campo dinâmico cujo bóson de Goldstone é o **áxion**, candidato a matéria escura.

5.4 Anomalia Axial e Instantons

Como visto na seção de anomalias, $\partial_\mu j_5^\mu \propto F\tilde{F}$. Integrando sobre um instanton com $Q = 1$, vê-se que instantons **convertem** quiralidade: a anomalia axial não é um obstáculo mas um mecanismo físico. No caso da QCD com $U(1)_A$ anômalo, isso resolve o famoso "problema do $U(1)$ " ('t Hooft): o η' é pesado precisamente porque o instanton quebra explicitamente $U(1)_A$, impedindo que se torne um bóson de Goldstone leve como os píons.

6 Solitons: Soluções Estáticas Topologicamente Estáveis

Solitons são soluções das equações de campo (não necessariamente euclidianas!) que:

- São **estáticas** (independentes do tempo) e localizadas no espaço.
- Têm energia finita.
- São topologicamente estáveis: protegidas contra decaimento por uma carga topológica conservada.
- **Não** descrevem tunelamento, mas sim **partículas reais** na teoria.

Enquanto instantons vivem no espaço-tempo euclidiano 4D e descrevem eventos, solitons vivem no espaço físico e são objetos espaciais extensos.

6.1 Kink em 1+1 Dimensões

O modelo mais simples: campo escalar em 1+1D com potencial de duplo poço

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2.$$

A equação estática $\phi'' = V'(\phi)$ tem solução:

$$\phi_{\text{kink}}(x) = v \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v x\right),$$

interpolando entre $\phi(-\infty) = -v$ e $\phi(+\infty) = +v$. A energia é finita:

$$M_{\text{kink}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\lambda} v^3 \sim \frac{m^3}{\lambda},$$

onde $m = \sqrt{2\lambda} v$. Note a dependência $1/\lambda$ — não-perturbativa.

A estabilidade é garantida pela **carga topológica**:

$$Q = \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_x \phi = \frac{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)}{2v} \in \mathbb{Z}.$$

6.2 Vórtice de Nielsen-Olesen (Teoria Abelian de Higgs em 2+1)

Considere QED escalar com $SU(1)$ local quebrado pelo Higgs:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu \phi|^2 - \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2.$$

Soluções tipo vórtice têm a estrutura (coordenadas cilíndricas r, φ):

$$\phi(r, \varphi) = v f(r) e^{in\varphi}, \quad A_\varphi(r) = \frac{n}{er} a(r),$$

com $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$, $a(0) = 0$, $a(\infty) = 1$. O fluxo magnético total é quantizado:

$$\Phi_B = \oint A \cdot d\ell = \frac{2\pi n}{e}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Esta é a estrutura responsável pelo **fluxo quantizado** em supercondutores tipo II (vórtices de Abrikosov), e uma das primeiras e mais bem-sucedidas aplicações de técnicas de QFT à matéria condensada.

6.3 Monopolo de 't Hooft-Polyakov

Em teorias de gauge não-abelianas quebradas espontaneamente, como $SU(2) \rightarrow U(1)$, existem soluções soliton **magneticamente carregadas** — monopolos magnéticos. Para $SU(2)$ com tripleto de Higgs:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (D_\mu \phi^a)^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v^2)^2.$$

A solução "*hedgehog*" ('t Hooft 1974, Polyakov 1974):

$$\phi^a = \hat{r}^a v h(r), \quad A_i^a = \epsilon_{aij} \hat{r}^j \frac{1 - K(r)}{er},$$

onde $\hat{r}^a = x^a/r$ é a orientação isospin $\equiv$ espacial (identificação topológica). Esse objeto carrega **carga magnética** $g_m = 4\pi/e$, consistente com a quantização de Dirac $eg_m = 2\pi n$. A massa é da ordem $M_{\text{mon}} \sim m_W/\alpha$, altíssima.

Monopolos são predições **inevitáveis** de GUTs: a quebra $G_{\text{GUT}} \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ envolve $\pi_2(G_{\text{GUT}}/H) \neq 0$. Sua ausência observacional no universo é uma das motivações para a **inflação cósmica**, que os dilui.

6.4 Limite BPS e Supersimetria

Em certas teorias (e no limite $\lambda \rightarrow 0$ com v fixo), as equações de solitons se reduzem a equações **de primeira ordem** (equações BPS):

$$D_i \phi = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}.$$

Soluções BPS saturam uma desigualdade entre massa e carga:

$$M \geq |Q|,$$

e são protegidas por supersimetria: sua massa é exata e não recebe correções quânticas. Esses "estados BPS" foram cruciais para entender dualidades em teoria de cordas e em teorias de gauge supersimétricas (dualidade de Montonen-Olive, dualidade de Seiberg-Witten).

7 Síntese: Papel Dual da Integral de Caminho

Recapitulando a arquitetura da integral de caminho em QFT:

Aspecto	Minkowski	Euclidiana (Wick)
Integrando	$e^{iS_M/\hbar}$ oscilatório	$e^{-S_E/\hbar}$ real positivo
Simetria	Lorentz $SO(1, 3)$	Rotação $SO(4)$
Convergência	Requer $+i\epsilon$	Absoluta (se V inf. limitado)
Uso natural	Amplitudes $\mathcal{M}$, matriz S	Funções de Green, lattice, termodinâmica
Pontos de sela	Trajетórias reais clássicas	Instantons, solitons, bounces
Efeitos não-pert.	Indiretos (via Wick)	Manifestos ($e^{-S_E/\hbar}$)
Analogia estatística	Nenhuma direta	$Z_{\text{QFT}} \leftrightarrow Z_{\text{stat}}$
Temperatura finita	Difícil	Natural (τ periódico)

A integral de caminho euclidiana é, portanto, muito mais do que uma mera manobra técnica de convergência: é a **linguagem natural** onde QFT, mecânica estatística, topologia e geometria diferencial se fundem. Fenômenos tão diversos quanto o tunelamento quântico, a transição de fase quiral da QCD no universo primordial, a quantização do fluxo em supercondutores, a existência (ou não) de monopolos magnéticos e o problema de CP forte têm suas origens em soluções clássicas não-triviais das equações euclidianas. A expansão perturbativa em torno de $\phi = 0$ **não vê nada disso**: captura apenas as flutuações gaussianas em torno do vácuo trivial. Para acessar a estrutura profunda do vácuo quântico, é imprescindível ir **além** da expansão perturbativa — e é exatamente isso que a integral de caminho euclidiana, com seus instantons e solitons, torna possível.

8 Funções de Green

8.1 Funções de Green de n Pontos

A função de Green de n pontos é a função de correlação do vácuo com ordenação temporal:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}.$$

Essas funções contêm toda a informação dinâmica da teoria. Em particular, $G^{(2)}(x, y) = \Delta_F(x - y)$ na teoria livre.

8.2 Funcional Gerador de Funções Conexas $W[J]$

Define-se

$$Z[J] = e^{iW[J]},$$

de modo que $W[J]$ é o **funcional gerador das funções de Green conexas**:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}.$$

Diagramaticamente, $W[J]$ gera apenas diagramas conexas (aqueles que não podem ser separados em subdiagramas desconectados), o que elimina contribuições triviais de vácuo.

8.3 Ação Efetiva $\Gamma[\varphi]$ e Funções 1PI

Define-se o campo clássico médio:

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_J.$$

A **ação efetiva** é a transformada de Legendre de $W[J]$:

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int d^4x J(x) \varphi(x),$$

com $J(x)$ agora determinado implicitamente por $\varphi(x)$. Suas derivadas funcionais geram as funções **1PI (um-partícula irredutíveis)**:

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \cdots \delta \varphi(x_n)}.$$

Uma função 1PI é aquela cujo diagrama não se desconecta ao cortar uma única linha interna. O conceito de 1PI é fundamental porque todas as funções conexas podem ser reconstruídas a partir de funções 1PI conectadas por propagadores completos.

8.4 Propagador Exato e Auto-Energia

Para $n = 2$, a função 1PI $\Gamma^{(2)}(p)$ no espaço de momentos está ligada ao propagador exato:

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon}, \quad -i\Sigma(p^2) = \Gamma_{\text{amp}}^{(2)}(p) - (p^2 - m^2),$$

onde $\Sigma(p^2)$ é a **auto-energia** (soma de todos os diagramas 1PI de dois pontos com as pernas externas amputadas). Os zeros do denominador fornecem a massa física (polo) e

a largura de decaimento (parte imaginária) das partículas.

8.5 Hierarquia das Funções

Resumindo a hierarquia:

Funcional	Gera	Tipo de diagramas
$Z[J]$	$G^{(n)}$	Todos (incluindo vácuo)
$W[J] = -i \ln Z[J]$	$G_c^{(n)}$	Conexos
$\Gamma[\varphi]$ (Legendre de W)	$\Gamma^{(n)}$	1PI, amputados

9 Fórmula de Redução LSZ e a Matriz S

As funções de Green definidas acima envolvem campos interpolantes fora da camada de massa. Para descrever processos físicos de espalhamento reais (onde partículas incidentes e emergentes estão assintoticamente livres em $t \rightarrow \pm\infty$, obedecendo $p^2 = m^2$), deve-se conectar essas funções de Green aos elementos da matriz S . Esse elo é a **Fórmula de Redução de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ)**.

9.1 Hipóteses Assintóticas

Assume-se que nos limites $t \rightarrow \pm\infty$ o campo ϕ aproxima-se de campos livres (*in* e *out*):

$$\phi(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \sqrt{Z_\phi} \phi_{\text{in}}(x), \quad \phi(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sqrt{Z_\phi} \phi_{\text{out}}(x),$$

onde Z_ϕ é a **constante de renormalização de função de onda** (resíduo do polo do propagador exato na massa física).

9.2 Fórmula LSZ para Campos Escalares

Para um processo $n \rightarrow m$ com n partículas iniciais de momentos $p_1, \dots, p_n$ e m partículas finais de momentos $k_1, \dots, k_m$ (todas na camada de massa, $p_i^2 = k_j^2 = m^2$), a fórmula LSZ

lê-se:

$$\begin{aligned} \langle k_1 \cdots k_m | S | p_1 \cdots p_n \rangle_{\text{conexo}} &= \left(i Z_\phi^{-1/2} \right)^{n+m} \\ &\times \prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{-i p_i \cdot x_i} (\square_{x_i} + m^2) \\ &\times \prod_{j=1}^m \int d^4 y_j e^{+i k_j \cdot y_j} (\square_{y_j} + m^2) \\ &\times G^{(n+m)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m). \end{aligned}$$

Interpretação: Os operadores $(\square + m^2)$ atuam sobre cada perna externa, **amputando** os propagadores externos (cancelando os polos de camada de massa). As exponenciais $e^{\pm i p \cdot x}$ projetam sobre os modos de frequência positiva/negativa (partículas/antipartículas). O resultado isola o resíduo do polo de camada de massa, que é precisamente o elemento da matriz S .

9.3 LSZ para Férmions

Para campos de Dirac $\psi, \bar{\psi}$, os operadores diferenciais apropriados são $(i \not{\partial} - m)$ e o resultado é contraído com espinores $u, \bar{u}$ (partículas) e $v, \bar{v}$ (antipartículas):

$$\begin{aligned} \langle \text{out} | S | \text{in} \rangle_c &= \prod_i \int d^4 x_i \bar{u}(p_i) (i \not{\partial}_{x_i} - m) e^{-i p_i \cdot x_i} Z_\psi^{-1/2} \times \cdots \\ &\times \prod_j \int d^4 y_j e^{+i k_j \cdot y_j} (-i \overleftarrow{\not{\partial}}_{y_j} - m) u(k_j) Z_\psi^{-1/2} \times \cdots \\ &\times \langle 0 | T \psi(x_1) \cdots \bar{\psi}(y_1) \cdots | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Cada perna fermiônica externa contribui com um fator $Z_\psi^{-1/2}$ e um espinor apropriado.

9.4 LSZ para Bósons Vetoriais

Para um bóson vetorial massivo V_μ com massa m_V , a fórmula LSZ contrai cada perna externa com um vetor de polarização $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ e aplica o operador $(\square + m_V^2)\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu$ (para garantir a amputação correta incluindo a estrutura de spin-1):

$$\langle \text{out} | S | \text{in} \rangle_c \supset \epsilon^{*\mu}(k) (\square + m_V^2) \times \cdots \quad (\text{perna do bóson}).$$

Para o fóton ($m_V = 0$), a polarização satisfaz $k \cdot \epsilon = 0$ com $k^2 = 0$, e a soma sobre polarizações físicas é $\sum_\lambda \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^{*\nu}(k, \lambda) = -\eta^{\mu\nu} + \text{termos de gauge}$.

9.5 A Matriz S e a Amplitude Invariante $\mathcal{M}$

A matriz S é a operadora de evolução do estado inicial ao final:

$$S = T \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}(x) \right),$$

onde $\mathcal{H}_{\text{int}}$ é a densidade de Hamiltoniano de interação. Seus elementos governam a transição entre um estado assintótico inicial $|i\rangle$ e um estado final $|f\rangle$:

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}.$$

Nesta equação:

- δ_{fi} : Representa a probabilidade do caso trivial em que os feixes de partículas passam um pelo outro sem interagir.
- $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)$: É a consequência direta do Teorema de Noether para a invariância translacional, garantindo a conservação macroscópica de energia e momento quadridimensional total do sistema.
- $\mathcal{M}_{fi}$: É a **amplitude de espalhamento invariante de Lorentz**, exatamente o valor numérico que obtemos ao multiplicar os vértices, propagadores e linhas externas dos diagramas de Feynman.

9.6 Série de Dyson e Expansão Perturbativa

Na representação de interação, a matriz S admite a expansão de Dyson:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T [\mathcal{H}_{\text{int}}(x_1) \cdots \mathcal{H}_{\text{int}}(x_n)].$$

Cada termo gera contribuições de ordem n em teoria de perturbações, associadas a diagramas de Feynman com n vértices. O teorema de Wick converte cada termo ordenado temporalmente em uma soma de contrações (propagadores) sobre todos os emparelhamentos possíveis dos campos, reproduzindo exatamente as regras de Feynman.

9.7 Unitariedade e Teorema Óptico

A unitariedade da matriz S , $S^\dagger S = \mathbb{K}$, com $S = \mathbb{K} + iT$, implica:

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T,$$

o que leva ao **teorema óptico**:

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(i \rightarrow i) = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(i \rightarrow f)|^2,$$

conectando a parte imaginária da amplitude elástica adiantada ao total das seções de choque. Este teorema é uma restrição fundamental de consistência em qualquer cálculo perturbativo.

Parte V

Regras de Feynman e Cálculo de Observáveis

Esta parte traduz o formalismo da teoria quântica de campos em regras práticas de cálculo: o dicionário de Feynman para propagadores e vértices, a construção de amplitudes invariantes, e o cálculo de seções de choque e taxas de decaimento — as grandezas que efetivamente são medidas em colisores.

1 O Dicionário de Feynman (Regras Práticas)

Para extrair o valor da amplitude $\mathcal{M}$, nós traduzimos os termos da Lagrangiana nas seguintes regras gráficas e matemáticas.

1.1 Receita Geral

Para um processo a uma dada ordem em teoria de perturbações:

1. Desenhe todos os diagramas topologicamente distintos que contribuam ao processo na ordem desejada.
2. Para cada **linha externa**, associe o fator de espinor/polarização apropriado.
3. Para cada **linha interna** (propagador), associe o fator $i/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$ com estrutura tensorial adequada ao spin.
4. Para cada **vértice**, inclua o fator derivado da expansão de $\mathcal{L}_{\text{int}}$.
5. Imponha conservação de quadri-momento em cada vértice.

6. Integre sobre os momentos não fixados (momentos de loop): $\int d^4\ell/(2\pi)^4$.
7. Inclua fatores combinatórios (simetria), um fator (-1) por **loop fermiônico fechado**, e uma soma sobre permutações de férmions externos idênticos.
8. Some todas as contribuições diagramáticas para obter $i\mathcal{M}$.

1.2 Linhas Externas (Estados Iniciais e Finais)

As linhas externas representam as partículas reais que chegam para interagir ou que saem do processo. Elas são soluções das equações de movimento livres.

- **Férmion Incidente (ex: elétron entrando no processo):** Espinor $u(p, s)$

$$u(p) \longrightarrow \overset{p}{\longrightarrow}$$

- **Férmion Emergente (ex: elétron saindo do processo):** Espinor adjunto $\bar{u}(p, s)$

$$\overset{p}{\longrightarrow} \longrightarrow \bar{u}(p)$$

- **Antiférmion Incidente (ex: pósitron entrando):** Espinor adjunto $\bar{v}(p, s)$

$$\bar{v}(p) \longleftarrow \overset{p}{\longrightarrow}$$

- **Antiférmion Emergente (ex: pósitron saindo):** Espinor $v(p, s)$

$$\overset{p}{\longrightarrow} \longleftarrow v(p)$$

- **Bóson Vetorial Incidente (Fóton, W , Z , Glúon):** Vetor de polarização $\epsilon_\mu(p, \lambda)$

$$\epsilon_\mu(p) \overset{p}{\longrightarrow} \sim$$

- **Bóson Vetorial Emergente:** Vetor de polarização conjugado $\epsilon_\mu^*(p, \lambda)$

$$\sim \overset{p}{\longrightarrow} \epsilon_\mu^*(p)$$

- **Escalar (Higgs) Incidente/Emergente:** fator 1 (nenhuma função adicional).

Somas sobre spins e polarizações:

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m,$$

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^*(k, \lambda) \epsilon_\nu(k, \lambda) = -\eta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_V^2} \quad (\text{vetor massivo}),$$

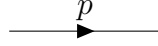
e, para o fóton em gauge de Feynman, efetivamente $-\eta_{\mu\nu}$ nos cálculos físicos.

1.3 Propagadores (Partículas Virtuais Internas)

Os propagadores conectam dois vértices internos. Diferente das linhas externas, eles descrevem partículas virtuais (fora da camada de massa, $p^2 \neq m^2$). Os denominadores revelam os polos da teoria associados à massa das partículas.

- **Propagador Fermiônico (ex: elétron virtual):**

$$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

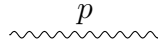


- **Propagador do Fóton (Gauge de Feynman, $\xi = 1$):**

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

Em gauge R_ξ geral:

$$\frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right].$$

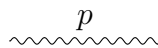


- **Propagador de Bóson Vetorial Massivo ($W^\pm, Z^0$) - Gauge Unitário:**

$$\frac{-i \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_V^2} \right)}{p^2 - m_V^2 + i\epsilon}$$

Em gauge R_ξ :

$$\frac{-i}{p^2 - m_V^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 - \xi m_V^2} \right].$$



- **Propagador do Glúon:**

$$\frac{-ig^{\mu\nu}\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon} \quad (\text{gauge de Feynman})$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{-----} \end{array}$$

- **Propagador do Higgs (Escalar):**

$$\frac{i}{p^2 - m_H^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{-----} \end{array}$$

- **Propagador de Fantasma (Faddeev-Popov):**

$$\frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon}$$

Este propagador aparece somente em loops internos em teorias de gauge não-abelianas.

1.4 Vértices de Interação

Cada vértice traz um fator derivado da expansão da Lagrangiana e garante a conservação local de momento, carga, cor e sabor (quando aplicável).

- **Férmion-Férmion-Fóton (QED):**

$$-ieQ_f\gamma^\mu$$

- **Férmion-Férmion- $W^\pm$ (Interação Fraca Carregada):**

$$i\frac{g}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\frac{(1-\gamma^5)}{2}V_{\text{CKM}}^{ij}$$

onde V_{CKM}^{ij} é o elemento apropriado da matriz CKM para transições entre quarks de sabores diferentes (ausente para léptons se os neutrinos forem tratados como sem massa).

- **Férmion-Férmion- Z^0 (Corrente Neutra):**

$$-i\frac{g}{\cos\theta_W}\gamma^\mu(g_V^f - g_A^f\gamma^5), \quad g_V^f = T_3^f - 2Q_f\sin^2\theta_W, \quad g_A^f = T_3^f.$$

- Quark-Quark-Glúon (QCD):

$$-ig_s \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} = -ig_s \gamma^\mu T^a$$

- Higgs-Férmion (Yukawa):

$$-i \frac{m_f}{v}$$

- Higgs-Bóson Vetorial (HVV):

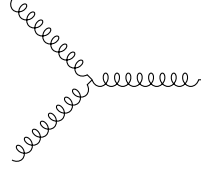
$$\frac{2i m_V^2}{v} g^{\mu\nu}, \quad V = W, Z.$$

$$\text{E quártico } HHVV : \frac{2i m_V^2}{v^2} g^{\mu\nu}.$$

- Auto-Interação Cúbica de Yang-Mills (3 Glúons / 3 Bósons W):

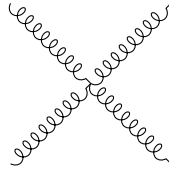
$$-g f^{abc} [g^{\mu\nu} (p - q)^\rho + g^{\nu\rho} (q - r)^\mu + g^{\rho\mu} (r - p)^\nu]$$

(Onde p, q, r são os momentos chegando no vértice, todos para dentro).



- Auto-Interação Quártica de Yang-Mills (4 Glúons / 4 Bósons W):

$$-ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$



- Vértice Fantasma-Gluon-Fantasma:

$$-g f^{abc} p^\mu,$$

onde p^μ é o momento do fantasma saindo do vértice. Este vértice aparece em loops e garante unitariedade em gauges covariantes.

- Auto-interação do Higgs (Cúbica e Quártica):

$$\text{Cúbica (HHH): } -6i \lambda v = -\frac{3i m_H^2}{v}, \quad \text{Quártica (HHHH): } -6i \lambda = -\frac{3i m_H^2}{v^2}.$$

2 Cinemática e Amplitudes de Espalhamento ($\mathcal{M}$)

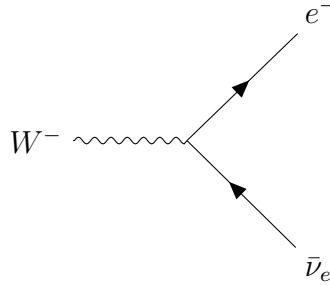
As amplitudes $\mathcal{M}$ são construídas multiplicando os fatores correspondentes aos vértices, propagadores e linhas externas (lendo o diagrama na direção contrária ao fluxo da linha fermiônica).

Para processos de espalhamento $2 \rightarrow 2$, é conveniente utilizar as **variáveis invariantes de Mandelstam**, definidas para $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$ como:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2,$$

com a restrição $s + t + u = \sum_i m_i^2$. O canal s corresponde à energia do centro de massa ao quadrado, t à transferência de momento direto e u à transferência cruzada.

2.1 Decaimento do Bóson W^- : $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$

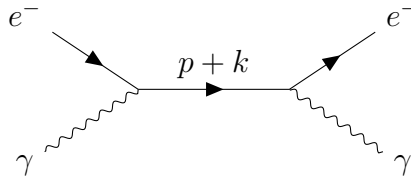


Neste processo de decaimento, a amplitude de transição é dada por:

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_e) \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) v(p_\nu) \epsilon_\mu(p_W)$$

2.2 Espalhamento Compton ($e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$)

A amplitude total exige a soma dos canais s e u .



$$\mathcal{M} = -e^2 \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \bar{u}(p') \left[\frac{\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} \gamma^\nu + \frac{\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} \gamma^\mu \right] u(p)$$

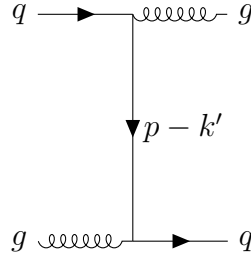
O módulo quadrado, somado/promediado sobre spins e polarizações, fornece (com $s = (p + k)^2$, $u = (p - k')^2$):

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left[\frac{\hat{u}}{\hat{s}} + \frac{\hat{s}}{\hat{u}} + 4m_e^2 \left(\frac{1}{\hat{s}} + \frac{1}{\hat{u}} \right) + 4m_e^4 \left(\frac{1}{\hat{s}} + \frac{1}{\hat{u}} \right)^2 \right],$$

onde $\hat{s} = s - m_e^2$, $\hat{u} = u - m_e^2$. Esta é a famosa fórmula de Klein-Nishina em formato invariante.

2.3 Espalhamento Quark-Glúon ($q + g \rightarrow q + g$)

Similar ao espalhamento Compton, mas envolve a troca de carga de cor e as matrizes de Gell-Mann λ^a . Inclui também a auto-interação dos glúons (canal t de troca de glúon não mostrado graficamente por brevidade, mas focado na linha fermiônica).



$$\mathcal{M}_t = -g_s^2 \bar{u}(p') \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \frac{\not{p} - \not{k}' + m}{(p - k')^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{\lambda^b}{2} u(p) \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k)$$

A amplitude quadrática somada sobre cores e polarizações (e promediada sobre iniciais) é:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = g_s^4 \left[-\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s} \hat{u}} + \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right],$$

fórmula padrão usada em cálculos de produção de jatos em colisores hadrônicos.

3 Conexão Experimental: Calculando Observáveis Físicas

Com a matriz $\mathcal{M}$ em mãos, nós calculamos seu módulo ao quadrado $|\mathcal{M}|^2$ (frequentemente somando ou tirando a média sobre os spins dos estados físicos). Ambas as observáveis físicas dependem da integração sobre o Espaço de Fase Invariante de Lorentz (LIPS), que

varre as configurações espaciais permitidas:

$$d\Pi_{\text{LIPS}} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(P_{\text{inicial}} - \sum p_f \right) \prod_{\text{partículas finais}} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}.$$

3.1 Taxa de Decaimento (Γ)

Define a probabilidade por unidade de tempo de uma partícula instável de massa M decair. No referencial de repouso da partícula original, a taxa diferencial é:

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Pi_{\text{LIPS}}.$$

Para um decaimento de dois corpos $M \rightarrow m_1 + m_2$ no referencial de repouso da partícula-mãe, a integração do espaço de fase é explícita e produz:

$$\Gamma_{1 \rightarrow 2} = \frac{|\vec{p}|}{8\pi M^2} |\overline{\mathcal{M}}|^2, \quad |\vec{p}| = \frac{\sqrt{\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)}}{2M},$$

onde $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$ é a função de Källén.

Cálculo Explícito: Largura de Decaimento do W^-

A taxa de decaimento Γ é calculada integrando a amplitude ao quadrado $|\mathcal{M}|^2$ sobre o espaço de fase. Para o bóson W em repouso decaindo em léptons sem massa ($m_e \approx m_\nu \approx 0$), a soma sobre spins finais e a média sobre as 3 polarizações iniciais de W dá:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{3} \sum_{\text{spins, pol}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2 m_W^2}{3}.$$

A largura de decaimento parcial é dada pela fórmula do espaço de fase de dois corpos (com $|\vec{p}| = m_W/2$ para produtos sem massa):

$$\Gamma(W \rightarrow e\nu) = \frac{|\vec{p}|}{8\pi m_W^2} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{m_W/2}{8\pi m_W^2} \cdot \frac{g^2 m_W^2}{3} = \frac{g^2 m_W}{48\pi} = \frac{G_F m_W^3}{6\pi\sqrt{2}},$$

onde $G_F/\sqrt{2} = g^2/(8m_W^2)$.

3.2 Seção de Choque (σ)

É a "área alvo" efetiva que quantifica a probabilidade de ocorrer uma interação específica quando dois feixes colidem. Para duas partículas de massas m_1 e m_2 colidindo com

momentos p_1 e p_2 , a seção de choque diferencial é dada por:

$$d\sigma = \frac{1}{F} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Pi_{\text{LIPS}},$$

com o **fator de fluxo invariante**

$$F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = 4|\vec{p}_1| \sqrt{s} \text{ (no CM).}$$

O termo no denominador atua como um fator de fluxo de cinemática pura, refletindo a densidade do feixe incidente.

Para espalhamento $2 \rightarrow 2$ no referencial do centro de massa com $\sqrt{s}$ fixo, a integração do espaço de fase de dois corpos produz:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |\overline{\mathcal{M}}|^2,}$$

onde $|\vec{p}_i|$ e $|\vec{p}_f|$ são os módulos dos momentos iniciais e finais no CM. Para massas iniciais e finais iguais, $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$.

3.3 Exemplos Adicionais

Espalhamento $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (via γ). No limite de altas energias ($s \gg m_\mu^2$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta), \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s},$$

onde $\alpha = e^2/(4\pi)$ é a constante de estrutura fina.

Dcaimento do Higgs $H \rightarrow f\bar{f}$.

$$\Gamma(H \rightarrow f\bar{f}) = \frac{N_c m_H m_f^2}{8\pi v^2} \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2},$$

onde $N_c = 3$ para quarks e 1 para léptons. O fator $(1 - 4m_f^2/m_H^2)^{3/2}$ reflete a supressão próxima ao limiar e é característico de decaimentos em férmions via acoplamento escalar.

Dcaimento $Z \rightarrow f\bar{f}$.

$$\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f}) = \frac{N_c m_Z}{12\pi} \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} \left[(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2 \right],$$

uma das previsões mais precisamente testadas do MP pelos experimentos LEP.

Parte VI

Renormalização e Grupo de Renormalização

O tratamento sistemático das divergências ultravioletas em diagramas de loop é apresentado aqui: auto-energia, polarização do vácuo, correção de vértice, o formalismo de contratermos e as equações do grupo de renormalização que governam a evolução dos acoplamentos com a escala de energia.

1 Renormalização: Auto-Energia, Polarização do Vácuo e Vértice

Em teoria quântica de campos, diagramas com loops internos frequentemente divergem quando integrados até momento infinito. A renormalização é o procedimento sistemático que absorve essas divergências em redefinições dos parâmetros "nus" da Lagrangiana, produzindo previsões finitas e em concordância extraordinária com o experimento. Esta seção detalha os três diagramas **1PI de um loop** fundamentais da QED — que servem de paradigma para toda a estrutura renormalizativa do Modelo Padrão — e em seguida expõe o formalismo de contratermos, as identidades de Ward e as equações do grupo de renormalização.

1.1 Contagem de Graus de Divergência Superficial

Antes de calcular, é crucial saber **quais diagramas divergem**. Para um diagrama em $D = 4$ dimensões, o grau de divergência superficial (índice ω) é:

$$\omega = 4L - 2P_B - P_F,$$

onde L é o número de loops, P_B o número de propagadores bosônicos e P_F o número de propagadores fermiônicos. Usando $L = I - V + 1$ (com I = linhas internas, V = vértices) e as relações topológicas, para QED chega-se a:

$$\omega_{\text{QED}} = 4 - E_\gamma - \frac{3}{2}E_e,$$

onde E_γ, E_e contam linhas externas de fóton e elétron. Os diagramas com $\omega \geq 0$ são potencialmente divergentes:

- $(E_\gamma, E_e) = (2, 0)$: auto-energia do fóton, $\omega = 2$ (quadraticamente divergente, mas reduzida a log por simetria de gauge).
- $(E_\gamma, E_e) = (0, 2)$: auto-energia do elétron, $\omega = 1$ (linearmente divergente, reduzida a log por simetria quiral).
- $(E_\gamma, E_e) = (1, 2)$: correção de vértice, $\omega = 0$ (logaritmicamente divergente).
- $(E_\gamma, E_e) = (4, 0)$: espalhamento fóton-fóton, $\omega = 0$, mas finita por gauge.

Estes são os **três diagramas 1PI primitivos** da QED. Todas as outras divergências da teoria se reduzem a combinações destes.

1.2 Regularização Dimensional: A Ferramenta

A regularização mais elegante é a **regularização dimensional** ('t Hooft-Veltman): calcula-se a integral em $d = 4 - 2\epsilon$ dimensões, onde as divergências aparecem como polos $1/\epsilon$. A virtude: preserva simetrias de gauge e Lorentz. A integral mestra é:

$$\boxed{\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta + i\epsilon)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \Delta^{d/2 - n}.$$

Para $n = 2$, $d = 4 - 2\epsilon$:

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right],$$

onde μ é a **escala de renormalização** (introduzida para manter a dimensionalidade correta). As constantes $-\gamma_E + \ln(4\pi)$ são tipicamente absorvidas no esquema $\overline{\text{MS}}$ (*modified minimal subtraction*).

1.3 Parametrização de Feynman

Para combinar propagadores no denominador, usa-se a **parametrização de Feynman**:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2},$$

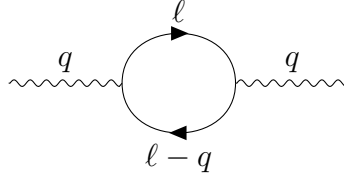
e sua generalização a n propagadores:

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_n} = (n-1)! \int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(1 - \sum x_i\right) \frac{1}{[x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n]^n}.$$

Isso transforma a integração de momento em uma integral gaussiana, permitindo aplicar a integral mestra.

2 Polarização do Vácuo (Auto-Energia do Fóton)

Um fóton virtual pode criar temporariamente um par e^+e^- virtual, produzindo o diagrama mais famoso da QED:



2.1 Cálculo Explícito

A amplitude 1PI do diagrama, $i\Pi^{\mu\nu}(q)$, é:

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -(-ie)^2 \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i(\not{\ell} + m)}{\ell^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{\ell} - \not{q} + m)}{(\ell - q)^2 - m^2} \right].$$

O sinal (-1) global vem do **loop fermiônico fechado**. Usando parametrização de Feynman para combinar os denominadores e deslocando $\ell \rightarrow \ell + xq$, a estrutura tensorial é:

$$\text{tr}[\gamma^\mu(\not{\ell} + x\not{q} + m)\gamma^\nu(\not{\ell} + (x-1)\not{q} + m)].$$

Após a álgebra de traços ($\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] = 4(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha})$) e usando simetria $\ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{\ell^2}{d} g^{\mu\nu}$ na integração, o resultado (após aplicar a integral mestra) é:

$$\boxed{i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2),}$$

com

$$\Pi(q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - 6 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - x(1-x)q^2}{\mu^2} \right].$$

2.2 Estrutura Transversal: Identidade de Ward

A combinação $(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$ é manifestamente **transversa**: $q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$. Esta é a **identidade de Ward** para o propagador do fóton, consequência direta da invariância de gauge $U(1)$. Três consequências profundas:

1. O fóton **permanece sem massa**: a divergência é $\propto q^2$, não $\propto g^{\mu\nu}$. Um termo de massa $\delta m_\gamma^2 g^{\mu\nu}$ é **proibido** por gauge.
2. A divergência, que seria quadrática por contagem de potências ($\omega = 2$), é reduzida a **logarítmica** pela estrutura tensorial $q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu$.
3. Apenas uma constante de renormalização, Z_3 , é necessária para o setor do fóton.

2.3 Propagador Completo e Running de α

Somando a série de inserções 1PI (geometricamente):

$$D_{\text{completo}}^{\mu\nu}(q) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2[1 - \Pi(q^2)]} + \text{termos longitudinais}.$$

O fator $1/(1 - \Pi(q^2))$ modifica efetivamente o acoplamento em cada escala de energia. Subtraindo em $q^2 = 0$ (renormalização on-shell):

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \Pi_R(q^2)}, \quad \Pi_R(q^2) \equiv \Pi(q^2) - \Pi(0).$$

Para $|q^2| \gg m_e^2$:

$$\boxed{\alpha(q^2) = \alpha(0) \left[1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} \ln \frac{|q^2|}{m_e^2} + \dots \right].}$$

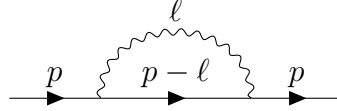
Isso é o célebre **running da constante de estrutura fina**: $\alpha(0) = 1/137.036$, $\alpha(m_Z^2) \approx 1/128$. Medido com precisão experimental no LEP, é uma das confirmações mais espetaculares da QED quântica.

2.4 Interpretação Física

A polarização do vácuo corresponde à **blindagem dielétrica** da carga elétrica pelo oceano de pares virtuais e^+e^- . Vista a grandes distâncias (baixo q^2), a carga é a carga observada e . Vista a curtas distâncias (alto q^2), penetra-se na nuvem de polarização e observa-se uma carga **maior** — daí o crescimento de α com a energia. Em QCD o sinal é oposto (liberdade assintótica) porque o loop de glúons domina sobre o de quarks.

3 Auto-Energia do Elétron

O elétron pode emitir e reabsorver um fóton virtual:



3.1 Cálculo

A amplitude é:

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{i(\not{p} - \not{\ell} + m)}{(p - \ell)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{-ig_{\mu\nu}}{\ell^2}.$$

Após parametrização de Feynman e aplicação da integral mestra:

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) (\not{p} - 4m) + \text{finito}(p^2, m, \mu) \right].$$

3.2 Estrutura: Massa e Função de Onda

A auto-energia é naturalmente decomposta como:

$$\Sigma(p) = \Sigma_V(p^2) \not{p} + \Sigma_m(p^2) m.$$

Duas contribuições divergentes distintas:

- Σ_m renormaliza a **massa**: $m_R = m_B + \delta m$.
- Σ_V renormaliza a **função de onda**: $\psi_B = \sqrt{Z_2} \psi_R$.

3.3 Proteção Quiral: A Mágica de 't Hooft

A contagem ingênua dá $\omega = 1$ (linearmente divergente). Entretanto, a divergência efetiva é apenas logarítmica. A razão é **simetria quiral**: no limite $m \rightarrow 0$, a Lagrangiana de Dirac tem simetria $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi$, que proíbe termos de massa. Portanto:

$$\delta m \propto m \times \ln(\Lambda/m),$$

não $\delta m \propto \Lambda$. Este é um exemplo paradigmático do princípio de 't Hooft: **uma pequena quantidade é tecnicamente natural se, ao pô-la a zero, se recupera uma simetria**. Massas fermiônicas são **tecnicamente naturais**; a massa do Higgs (escalar) **não** é — eis a origem do problema da hierarquia.

3.4 Massa Física e Resíduo

O propagador completo é:

$$S_F^{-1}(p) = \not{p} - m_B - \Sigma(p).$$

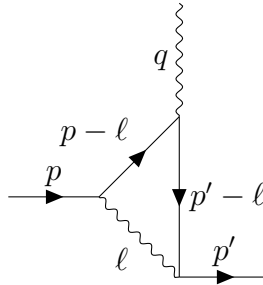
A **massa física** m_P é definida pelo polo: $\not{p} = m_P \Rightarrow S_F^{-1} = 0$. Expandindo perto do polo:

$$S_F(p) \xrightarrow{\not{p} \rightarrow m_P} \frac{iZ_2}{\not{p} - m_P}, \quad Z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m_P}.$$

Z_2 é o **resíduo do polo** — a constante de renormalização da função de onda do elétron. Esse é também o fator $1/Z_2^{1/2}$ que aparece na fórmula LSZ.

4 Correção de Vértice

O diagrama mais rico da QED: inserção de um fóton virtual no vértice γe^+e^- .



4.1 Cálculo

A amplitude 1PI é:

$$-ie \Lambda^\mu(p', p) = (-ie)^3 \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \gamma^\alpha \frac{i(\not{p}' - \not{\ell} + m)}{(p' - \ell)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{i(\not{p} - \not{\ell} + m)}{(p - \ell)^2 - m^2} \gamma^\beta \frac{-ig_{\alpha\beta}}{\ell^2}.$$

4.2 Decomposição em Fatores de Forma

Na camada de massa, o teorema de Gordon e a invariância de Lorentz impõem:

$$\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) = \bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p),$$

onde $q = p' - p$ é a transferência de momento, e:

- $F_1(q^2)$: **fator de forma elétrico** (corrige a carga).
- $F_2(q^2)$: **fator de forma magnético**, contribui ao momento magnético anômalo.

No nível árvore, $F_1 = 1$ e $F_2 = 0$. As correções quânticas modificam ambos.

4.3 F_1 e Renormalização da Carga

$F_1(q^2)$ contém a divergência UV do vértice:

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left[-\frac{1}{\epsilon} + \text{finito}(q^2) \right] + \dots$$

A renormalização da carga exige a condição $F_1(0) = 1$ (a carga em repouso é a carga física observada). O contratermo δZ_1 cancela exatamente a divergência.

4.4 F_2 e o Momento Magnético Anômalo

Schwinger (1948), em um dos cálculos mais famosos da física, mostrou que $F_2(0)$ é **finito**:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{a_e}{1}, \quad a_e = \frac{g - 2}{2}.$$

O elétron tem um momento magnético anômalo: em vez de $g_e = 2$ (Dirac), $g_e = 2(1 + \alpha/2\pi + \dots) \approx 2.00232$. O cálculo atual chega à ordem α^5 , e a comparação com a medida experimental de a_e atinge 12 algarismos significativos de concordância — **o teste mais**

preciso de qualquer teoria física. Para o múon, a_μ apresenta possível discrepância de 4σ entre teoria e experimento (Fermilab 2021/2023), possivelmente sinalizando nova física.

4.5 Identidade de Ward-Takahashi: $Z_1 = Z_2$

A relação exata entre o vértice e a auto-energia do elétron é:

$$q_\mu \Gamma^\mu(p', p) = S_F^{-1}(p') - S_F^{-1}(p).$$

No limite $q \rightarrow 0$:

$$\Gamma^\mu(p, p) = \frac{\partial S_F^{-1}(p)}{\partial p_\mu}.$$

Consequentemente, as constantes de renormalização satisfazem:

$$\boxed{Z_1 = Z_2.}$$

Essa identidade é **não-perturbativa** e tem consequência profunda: a carga renormalizada

$$e_R = Z_1^{-1} Z_2 \sqrt{Z_3} e_B = \sqrt{Z_3} e_B$$

depende apenas de Z_3 (auto-energia do fóton). **Carga elétrica é universal** — múon e elétron têm rigorosamente a mesma carga, independente de massa. Isso é uma previsão quântica, não uma suposição.

5 Formalismo de Contratermos

A estratégia sistemática para lidar com divergências é a **renormalização multiplicativa**.

Escreve-se:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{nua}} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^B)^2 + \bar{\psi}^B(i\not{D} - m_B)\psi^B - e_B \bar{\psi}^B \gamma^\mu \psi^B A_\mu^B,$$

e redefine-se tudo em termos de quantidades físicas:

$$\psi^B = \sqrt{Z_2} \psi, \quad A_\mu^B = \sqrt{Z_3} A_\mu, \quad m_B = Z_m m, \quad e_B = Z_e e.$$

Substituindo, a Lagrangiana se divide em **parte renormalizada** + **contratermos**:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{\text{CT}},$$

com

$$\mathcal{L}_{\text{CT}} = -\frac{1}{4}\delta_3 F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m)\psi - \delta_1 e \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,$$

onde $\delta_i = Z_i - 1$. Os contratermos geram novos vértices de Feynman que cancelam **exatamente** as divergências dos diagramas de loop, ordem a ordem em perturbação. A identidade de Ward implica $\delta_1 = \delta_2$.

5.1 Esquemas de Renormalização

As condições que fixam os Z_i não são únicas — constituem um **esquema**. Os mais usados:

- **On-shell**: $m_R = \text{polo do propagador}$, $\alpha_R = \alpha(q^2 = 0)$. Conveniente para QED.
- $\overline{\text{MS}}$: subtrai apenas os polos $1/\epsilon$ mais as constantes $-\gamma_E + \ln 4\pi$. Standard em QCD.
- **MOM**: condições em pontos específicos de momento Euclidiano. Usado em lattice.

Observáveis físicos são **independentes** do esquema. Parâmetros "fundamentais" (como α_s , massas de quarks) **dependem** do esquema.

6 Equações do Grupo de Renormalização

A arbitrariedade da escala μ gera uma estrutura profunda. Observáveis físicos devem ser independentes de μ :

$$\mu \frac{d}{d\mu} \mathcal{O}_{\text{física}} = 0.$$

Para uma função de Green $G^{(n)}$, isso produz a equação de Callan-Symanzik:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - n \gamma_\phi(g) \right] G^{(n)} = 0,$$

onde

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu}, \quad \gamma_\phi = \frac{1}{2} \mu \frac{d \ln Z_\phi}{d\mu}$$

são as funções beta e dimensão anômala.

6.1 β -função da QED

A um loop:

$$\beta_{\text{QED}}(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} > 0.$$

Signo positivo $\Rightarrow \alpha$ cresce com a energia. Formalmente leva a um **polo de Landau** em $\mu \sim m_e e^{3\pi/\alpha} \sim 10^{286}$ GeV — bem além da escala de Planck, portanto sem impacto prático, mas indicando que a QED isolada não é uma teoria UV-completa.

6.2 β -função da QCD

A um loop, em $SU(N_c)$ com n_f sabores:

$$\beta_{\text{QCD}}(g_s) = -\frac{g_s^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}n_f \right).$$

Com $N_c = 3$, $n_f \leq 16$, o coeficiente é **negativo** — a **liberdade assintótica** (Gross, Politzer, Wilczek 1973, Nobel 2004). O acoplamento decresce a altas energias:

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{b_0 \ln(\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}, \quad b_0 = \frac{11N_c - 2n_f}{12\pi},$$

onde $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200$ MeV é a **escala intrínseca de QCD**. A baixas energias ($\mu \sim \Lambda_{\text{QCD}}$), $\alpha_s \rightarrow \infty$: **confinamento**. Métodos perturbativos falham e é imprescindível recorrer a abordagens não-perturbativas, especialmente **lattice QCD**.

6.3 Por que a Diferença de Sinal?

Em QED, apenas pares fermiônicos contribuem, e sua blindagem aumenta a carga efetiva a curta distância. Em QCD, além dos quarks (efeito similar), os **glúons autointeragem** (setor não-abeliano), produzindo **antiblandagem**. O coeficiente $\frac{11}{3}N_c$ vem do loop de glúons; o $-\frac{2}{3}n_f$ vem dos quarks. Para $N_c = 3$ e $n_f = 6$: $\frac{33-12}{3} = 7 > 0$ (com sinal negativo na β -função $\Rightarrow$ liberdade assintótica).

Parte VII

QCD Não-Perturbativa

1 QCD Não-Perturbativa: Simetria Quiral e ChPT

A QCD apresenta duas faces completamente distintas. Em altas energias ($Q \gg \Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 \text{ MeV}$), α_s é pequeno, quarks e glúons são os graus de liberdade fundamentais, e métodos perturbativos descrevem com precisão processos como espalhamento profundamente inelástico (DIS) e jatos em colisores. Em baixas energias, $\alpha_s \sim 1$, e a QCD torna-se um sistema fortemente acoplado onde **quarks e glúons ficam confinados** dentro de hádrons. Toda a fenomenologia dos píons, núcleons, ressonâncias, núcleos e propriedades hadrônicas vive nesse regime não-perturbativo.

Esta seção desenvolve as ferramentas para tratar a QCD em baixa energia: a quebra espontânea da simetria quiral (origem das massas dos núcleons e natureza dos píons como bósons de Goldstone), a Chiral Perturbation Theory (ChPT) como teoria efetiva de mésons, o modelo de Nambu-Jona-Lasinio, a expansão $1/N_c$ de 't Hooft, regras de soma de QCD, e funções de distribuição partônica com evolução DGLAP.

1.1 Simetria Quiral e sua Quebra Espontânea

No limite quiral $m_u = m_d = 0$ (e por vezes $m_s = 0$), a Lagrangiana de QCD tem simetria adicional:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{m=0} \supset \bar{q}_L i \not{D} q_L + \bar{q}_R i \not{D} q_R.$$

Os setores esquerdo e direito desacoplam, originando simetria global:

$$G = SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_A,$$

onde $U(1)_V$ é conservação bariônica, $U(1)_A$ é anômala (discussão anterior sobre instantons e o problema $U(1)$). Na prática, o grupo relevante é:

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R.$$

Para $N_f = 2$ (u, d): simetria $SU(2)_L \times SU(2)_R \supset SU(2)_{\text{isospin}}$.

Evidência fenomenológica da quebra. Se $SU(2)_L \times SU(2)_R$ fosse simetria exata *realizada linearmente* (à la Wigner), esperaríamos partículas em multipletos degenerados sob a transformação quiral — em particular, para cada hádron, um "parceiro de paridade oposta" com mesma massa.

Isso não é observado: o parceiro quiral do núcleon $N(938)$ seria o $N^*(1535)$ — diferença de 600 MeV, enormemente não-degenerado. Conclusão: a simetria quiral é espontaneamente quebrada.

1.2 O Condensado Quiral

O parâmetro de ordem da quebra é o **condensado quiral**:

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle \neq 0.$$

Sob transformação quiral $q \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta^a T^a/2) q$:

$$\bar{q}q \rightarrow \bar{q}q \cos \theta + i\bar{q}\gamma_5 T^a q \sin \theta^a.$$

Um condensado $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$ **não é invariante** sob $SU(2)_A$ (eixos quirais), apenas sob $SU(2)_V$ (isospin). Portanto:

$$\boxed{SU(2)_L \times SU(2)_R \xrightarrow{\langle \bar{q}q \rangle} SU(2)_V.}$$

Valor. Extraído via relação de Gell-Mann-Oakes-Renner e medidas em lattice QCD:

$$\langle \bar{q}q \rangle \approx -(250 \text{ MeV})^3.$$

1.3 Píons como Bósons de Goldstone

O teorema de Goldstone: para cada gerador quebrado, emerge um bóson escalar de massa zero. A quebra $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$ quebra 3 geradores axiais $\Rightarrow$ **3 bósons de**

Goldstone. Esses são identificados com os píons:

$$\pi^+, \pi^-, \pi^0.$$

Se o limite quiral fosse exato, os píons seriam **exatamente sem massa**. Como $m_u, m_d \neq 0$, há uma **quebra explícita leve** da simetria quiral, que dá aos píons uma massa pequena:

$$m_\pi^2 = \frac{(m_u + m_d) |\langle \bar{q}q \rangle|}{f_\pi^2},$$

— a **relação de Gell-Mann-Oakes-Renner (GMOR)**. Com $m_u + m_d \approx 7$ MeV, $f_\pi = 92$ MeV, $|\langle \bar{q}q \rangle| \approx (250 \text{ MeV})^3$: $m_\pi \approx 140$ MeV ✓ (acordo percentual).

Píons são pseudo-bósons de Goldstone. Massa pequena mas não zero, proporcional à massa dos quarks. Quando $N_f = 3$ (incluindo s), os 8 geradores axiais de $SU(3)_A$ geram o **octeto pseudoescalar**: $\pi^{0,\pm}, K^{0,\pm}, \bar{K}^0, \eta$. O nono estado (η') é *muito mais pesado* — a anomalia $U(1)_A$ (instantons) o empurra para cima, resolvendo o problema $U(1)$ de 't Hooft.

1.4 Origem da Massa Hadrônica

Um resultado profundo: o núcleon pesa ~ 938 MeV, mas a soma das massas de seus quarks de valência é $2m_u + m_d \approx 10$ MeV — cerca de **1%** da massa do núcleon. Os 99% restantes vêm de:

$$\text{Massa do núcleon} \approx \text{Energia de QCD} \sim \langle \bar{q}q \rangle, \alpha_s \times \text{conteúdo glúônico.}$$

Toda a massa da matéria visível do universo (núcleons) é, em essência, **energia de interação não-perturbativa de QCD**. O Higgs dá massa apenas aos quarks; é a quebra quiral de QCD que gera a massa dos hádrons — e, portanto, da matéria comum. Esse resultado foi confirmado com precisão percentual por lattice QCD (cálculos de BMW e outras colaborações).

1.5 Chiral Perturbation Theory (ChPT)

ChPT é a **teoria efetiva de baixa energia da QCD**, organizada em expansão de potências do momento externo p e das massas dos quarks. Os graus de liberdade fundamentais são os bósons pseudoescalares de Goldstone (octeto π, K, η), não quarks e glúons.

Variável fundamental. A matriz de Goldstones é:

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\sqrt{2}\Phi(x)}{f_\pi}\right), \quad \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Sob transformações $SU(3)_L \times SU(3)_R$:

$$U \rightarrow L U R^\dagger, \quad L \in SU(3)_L, \quad R \in SU(3)_R.$$

Lagrangiana de ChPT a $\mathcal{O}(p^2)$. Expandindo em derivadas (equivalente a momentos), o termo de menor ordem:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger] + \frac{f_\pi^2 B_0}{2} \text{tr}[\mathcal{M} U + U^\dagger \mathcal{M}^\dagger],$$

onde $\mathcal{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ é a matriz de massa dos quarks (quebra explícita) e $B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle / f_\pi^2$. Expandindo em potências dos píons:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^a - \frac{1}{2} m_\pi^2 (\pi^a)^2 + \mathcal{L}_{\text{int}},$$

com $\mathcal{L}_{\text{int}}$ descrevendo interações $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\pi\pi \rightarrow \pi\pi\pi\pi$, etc. **Todas as interações são preditas** em termos de f_π e m_π .

Ordens superiores. $\mathcal{L}_4$ contém termos $\mathcal{O}(p^4)$ com 10 constantes de baixa energia (LECs): $L_1, \dots, L_{10}$, determinadas experimentalmente. $\mathcal{L}_6$ tem $\mathcal{O}(p^6)$ com dezenas de LECs.

Sucessos. ChPT prevê com precisão (poucos por cento):

- Espalhamento $\pi\pi$ em baixa energia.
- Decaimentos $K \rightarrow 3\pi$, $K \rightarrow \pi\pi\pi$.
- Fatores de forma eletromagnéticos de píons e kaons.
- Polarizabilidades hadrônicas.
- Relações entre massas e acoplamentos do octeto pseudoescalar.

Complementa lattice QCD: usada para extrapolar resultados de lattice (em quarks pesados não-físicos) para massas físicas.

1.6 O Modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)

Modelo histórico (1961) que *antecipa* em 2 anos o mecanismo de Higgs, descrevendo quebra dinâmica de simetria quiral através de interações quartic-fermion:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + G [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi)^2].$$

Sem termo de massa para quarks no nível árvore, com $SU(2)_L \times SU(2)_R$ exata. Se G é suficientemente grande, um condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ se forma dinamicamente, gerando **massa constituinte** $M_q \sim 300$ MeV para o quark.

Equação de *gap*. Resolvendo a *self-consistency*:

$$M_q = 4G \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad \langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{M_q N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M_q^2}}.$$

Para $\Lambda \sim 1$ GeV e $G\Lambda^2 \gtrsim \pi^2$, ocorre transição de fase e $M_q \neq 0$ emerge.

Virtudes do NJL.

- Descreve a transição quiral *analiticamente*.
- Prediz espectro mesônico (píon, sigma, rho) em termos de M_q, G, Λ .
- Modelo paradigmático para transições de fase (supercondutividade, inflação).
- Serve de guia para entender quebra quiral em densidades finitas (matéria de quarks em estrelas de nêutrons).

Limitações.

- Não tem confinamento (quarks são estados assintóticos do NJL).
- Não renormalizável — requer *cutoff*.
- Ignora glúons.

Mesmo assim, NJL permanece como "laboratório" didático e computacional para explorar física quiral.

1.7 Expansão $1/N_c$ de 't Hooft

'tHooft (1974) propôs tratar o número de cores N_c como parâmetro de expansão. Mantendo $\lambda = g_s^2 N_c$ fixo (acoplamento de 't Hooft) e tomando $N_c \rightarrow \infty$, a QCD se simplifica drasticamente.

Contagem de N_c . Cada diagrama pode ser desenhado em notação de **linha dupla** (quark = linha simples, glúon = par de linhas, uma para cada índice de cor). Contando fatores de N_c :

- Diagramas **planares** (desenháveis em superfície com topologia esférica) dominam a $\mathcal{O}(N_c^2)$.
- Diagramas não-planares são suprimidos por $\mathcal{O}(1/N_c^2)$.
- Loops de quarks internos são suprimidos por $\mathcal{O}(1/N_c)$.

Consequências no limite $N_c \rightarrow \infty$.

- Mesons são estáveis e não-interagentes: larguras $\Gamma/m \sim \mathcal{O}(1/N_c)$.
- Decaimento mesônico é suprimido.
- Amplitudes $2 \rightarrow 2$ de méson $\sim 1/N_c$.
- O espectro consiste em infinitas ressonâncias estreitas (como em modelos duais, precursores da teoria de cordas).
- Anomalia $U(1)_A$ é suprimida: $m_{\eta'}^2 \sim 1/N_c$ no limite quiral, explicando por que η' é apenas moderadamente pesado.

Relação com cordas e AdS/CFT. A topologia planar $\rightarrow$ expansão de gênero em superfícies de corda. Essa conexão motivou e precedeu a descoberta de AdS/CFT (Maldacena 1997): $\mathcal{N} = 4$ SYM com gauge $SU(N)$ em $N \rightarrow \infty$ é dual a gravidade em $\text{AdS}_5 \times S^5$. O limite $1/N$ é hoje uma das ferramentas mais poderosas em QCD fortemente acoplada.

Na prática. Para QCD com $N_c = 3$, a expansão em $1/N_c^2 = 1/9 \approx 11\%$ é numericamente razoável. Explica qualitativamente a dominância de ressonâncias estreitas (Zweig rule), supressão de mixing η - η' , hierarquia de larguras, entre outras regularidades observadas.

1.8 Regras de Soma de QCD (SVZ)

Shifman-Vainshtein-Zakharov (1979) desenvolveram um método poderoso para relacionar propriedades hadrônicas (ressonâncias de baixa energia) a parâmetros fundamentais da QCD (condensados, massas).

Ideia. Para uma corrente hadrônica $j(x)$ (ex.: $j^\mu = \bar{u}\gamma^\mu d$ para o ρ), estuda-se o correlator:

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle.$$

Em alta $Q^2 = -q^2$, $\Pi(q^2)$ admite expansão em produto de operadores (OPE):

$$\Pi(Q^2) = C_0(Q^2) + \frac{C_{\bar{q}q}(Q^2) \langle \bar{q}q \rangle}{Q^4} + \frac{C_{G^2}(Q^2) \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle}{Q^4} + \dots$$

Em baixa Q^2 , Π é dominada por ressonâncias hadrônicas (modelo de pólos + contínuo).

Dualidade quark-hadron. Equacionando as duas representações via transformada de Borel (que melhora convergência):

$$\int ds e^{-s/M^2} \rho_{\text{hadron}}(s) = \int ds e^{-s/M^2} \rho_{\text{QCD+OPE}}(s).$$

Permite **calcular** propriedades hadrônicas (massas, acoplamentos) em termos de condensados de QCD. Sucessos:

- Massa do ρ : $m_\rho \approx 770$ MeV em termos de $\langle \bar{q}q \rangle$ e $\langle G^2 \rangle$.
- Constantes de decaimento f_π, f_K, f_B .
- Momento magnético do núcleon.
- Form-factors eletromagnéticos.

1.9 Funções de Distribuição Partônica (PDFs)

Em altas energias, processos hadrônicos são descritos por **partons** — quarks e glúons livres (liberdade assintótica) carregando frações x do momento do hádron. As funções de distribuição partônica:

$$f_i(x, Q^2) = \text{densidade do parton } i \text{ com fração de momento } x, \text{ na escala } Q^2,$$

codificam a estrutura interna do hádron. São **não-perturbativas** e devem ser extraídas de dados experimentais (ou calculadas em lattice).

Teoremas de fatorização. Para DIS inclusivo $ep \rightarrow eX$ com Q^2 grande, a seção de choque se fatoriza:

$$\sigma(ep \rightarrow eX) = \sum_i \int dx f_i(x, Q^2) \hat{\sigma}_{ei}(x, Q^2),$$

onde $\hat{\sigma}_{ei}$ é a seção de choque perturbativa **calculável** de $e + \text{parton} \rightarrow e + X$, e $f_i(x, Q^2)$ contém toda a física não-perturbativa. Fatorização é o que permite previsão quantitativa em colisores.

Evolução DGLAP. Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (1972-77): $f_i(x, Q^2)$ depende da escala Q^2 via grupo de renormalização:

$$Q^2 \frac{\partial f_i(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \sum_j \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{ij}(z) f_j\left(\frac{x}{z}, Q^2\right),$$

onde $P_{ij}(z)$ são as **funções de desdobramento** (*splitting functions*) — probabilidade por $\ln Q^2$ de um parton j emitir um parton i com fração z .

Funções de desdobramento ao nível mais baixo. LO (*leading order*):

$$P_{qq}(z) = C_F \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \dots, \quad P_{qg}(z) = T_F [z^2 + (1-z)^2],$$

$$P_{gq}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad P_{gg}(z) = 2C_A \left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \dots$$

com $C_F = 4/3$, $C_A = 3$, $T_F = 1/2$. Conhecidas a NNLO, em cálculo para N3LO.

Interpretação. Quando Q^2 aumenta, sondamos o núcleon em resolução espacial cada vez menor. Vemos mais emissões perturbativas, e os quarks de valência "parecem" dividir seu momento entre mais partons. A distribuição de glúons em x pequeno cresce rapidamente com Q^2 — fenômeno observado no HERA e fundamental para previsões no LHC.

Colaborações de PDFs. CT, MSHT, NNPDF mantêm ajustes globais de PDFs usando centenas de medidas experimentais (DIS, Drell-Yan, jatos, W/Z , $t\bar{t}$). Cálculos modernos atingem NNLO e incluem correções eletrofracas.

1.10 Teoremas de Fatorização

A fatorização é generalizada para diversos processos:

Fatorização colinear (inclusiva). Para processos com observável inclusivo (seção de choque total, jatos duros), a separação entre perturbativo e não-perturbativo é expressa como:

$$d\sigma = f_a \otimes f_b \otimes \hat{\sigma}_{ab \rightarrow X} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{Q}\right)^n.$$

Provado rigorosamente para DIS, Drell-Yan, produção de fótons inclusivos.

Fatorização TMD (*transverse momentum dependent*). Para observáveis sensíveis ao momento transversal:

$$d\sigma \sim f_a^{TMD}(x_a, k_{T,a}) \otimes f_b^{TMD}(x_b, k_{T,b}) \otimes \hat{H} \otimes S,$$

com TMD PDFs f^{TMD} e fator suave S . Ativo em processos Drell-Yan, SIDIS.

Fatorização para jatos. Funções de fragmentação $D_i^h(z, Q^2)$ descrevem a conversão parton $i \rightarrow$ hádron h :

$$d\sigma(pp \rightarrow hX) = f_a \otimes f_b \otimes \hat{\sigma}_{ab \rightarrow cX} \otimes D_c^h.$$

Também satisfaz equações DGLAP.

Violações de fatorização. Em situações específicas (processos não-inclusivos em p_T baixo, decaimentos exclusivos com troca de cor de longa distância), a fatorização pode ser violada por correções de **efeitos de *color reconnection*** e *underlying event* — ativa área de pesquisa.

1.11 Confinamento: O Problema em Aberto

Apesar de todos os sucessos acima, **uma prova analítica do confinamento a partir da Lagrangiana de QCD não existe**. Evidências:

- Lattice QCD demonstra numericamente: potencial $Q\bar{Q}$ linear a grandes distâncias.
- Modelos efetivos (*dual superconductor*, centro de *vortex*, monopolos abelianos) sugerem mecanismos.

- 't Hooft e Mandelstam: confinamento via condensação de monopolos magnéticos (dual ao Meissner em supercondutor).

O problema de Yang-Mills com *mass gap* é um dos sete Problemas do Millennium do Clay Institute (1 milhão de dólares pela solução): demonstrar rigorosamente que Yang-Mills em 4D tem um espectro com massa mínima positiva, $m > 0$. Esse é o problema do confinamento em sua formulação matemática mais limpa.

1.12 Síntese

A QCD é uma teoria com dois regimes radicalmente diferentes, unidos pela mesma Lagrangiana:

Alta energia ($Q \gg \Lambda_{\text{QCD}}$)	Baixa energia ($Q \sim \Lambda_{\text{QCD}}$)
$\alpha_s \ll 1$	$\alpha_s \sim 1$
Perturbação funciona	Não-perturbativo
Partons (quarks, glúons)	Hádrons (mésons, bárions)
Liberdade assintótica	Confinamento
DIS, jatos, PDFs	Píons, núcleons, ressonâncias
DGLAP, fatorização	ChPT, $1/N_c$, SVZ, lattice

A conexão entre essas duas descrições — a **transição perturbativa-para-hadrônica** — é a essência da dinâmica de QCD, e é o que lattice QCD (próxima seção) permite investigar de primeiros princípios.

2 Lattice QCD

Quando o acoplamento se torna forte, a expansão perturbativa falha. Para estudar QCD a baixas energias — hádrons, confinamento, quebra de simetria quiral, termodinâmica de quarks e glúons — é necessário um método **não-perturbativo** e **de primeiros princípios**. A técnica que satisfaz essas exigências e transformou a QCD em uma teoria quantitativa a baixas energias é a **Lattice QCD** (Wilson 1974).

2.1 A Ideia: Discretização do Espaço-Tempo

A estratégia é conceitualmente simples e operacionalmente poderosa:

1. Rotacionar para tempo euclidiano (Wick): $t \rightarrow -i\tau$. O integrando $e^{iS/\hbar}$ torna-se $e^{-S_E/\hbar}$, positivo-definido.
2. Discretizar o espaço-tempo euclidiano em uma **rede hipercúbica** 4D com espaçamento a , N^4 sítios.
3. Definir os campos nos sítios (quarks) e nas ligações (glúons).
4. Avaliar $Z = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_E}$ por **Monte Carlo**.

A rede introduz um cutoff UV natural $\Lambda_{UV} = \pi/a$. No limite contínuo $a \rightarrow 0$, e volume infinito $Na \rightarrow \infty$, a teoria do contínuo é recuperada.

2.2 Campos de Gauge: Variáveis de Ligação de Wilson

O truque chave de Wilson foi abandonar A_μ^a como variável fundamental. Em seu lugar, definem-se **ligações de gauge**:

$$U_\mu(n) \equiv \exp[iag_s A_\mu^a(n) T^a] \in SU(3),$$

associadas ao segmento orientado entre o sítio n e $n + \hat{\mu}$. Vantagens imensas:

- $U_\mu(n)$ é um elemento do grupo (matriz unitária 3×3), não de sua álgebra. A invariância de gauge torna-se **exata** na rede, não aproximada.
- Sob transformação de gauge local $\Omega(n) \in SU(3)$:

$$U_\mu(n) \rightarrow \Omega(n) U_\mu(n) \Omega^\dagger(n + \hat{\mu}),$$

generalizando a transformação contínua dos transportadores paralelos.

2.3 A Ação de Wilson

Para construir uma quantidade invariante de gauge, combinam-se ligações em **loops fechados**. O mais simples é a **plaqueta**:

$$U_{\mu\nu}(n) \equiv U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(n).$$

Na expansão $a \rightarrow 0$:

$$U_{\mu\nu}(n) = \exp[ia^2 g_s F_{\mu\nu}^a(n) T^a + \mathcal{O}(a^4)].$$

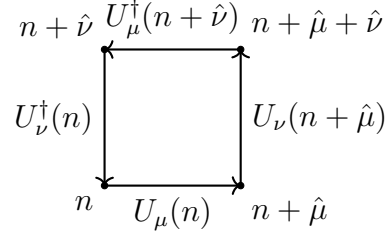
A ação de Wilson é:

$$S_G^W[U] = \frac{2N_c}{g_s^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(n) \right].$$

Expandindo em a :

$$S_G^W = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \mathcal{O}(a^2),$$

recuperando a ação de Yang-Mills contínua no limite. A representação é:



Ações melhoradas (*improved actions*) como Symanzik adicionam loops maiores (retângulos, *chairs*) para reduzir erros $\mathcal{O}(a^2)$ e acelerar a convergência ao contínuo.

2.4 Férmions na Rede: O Problema da Duplicação

Discretizar férmions é não-trivial. A ação "naïve":

$$S_F^{\text{naïve}} = a^4 \sum_n \left[\sum_{\mu} \frac{\bar{\psi}(n) \gamma_{\mu} [\psi(n + \hat{\mu}) - \psi(n - \hat{\mu})]}{2a} + m \bar{\psi}(n) \psi(n) \right]$$

tem propagador (momentos na zona de Brillouin $p_{\mu} \in [-\pi/a, \pi/a]$):

$$S_F^{-1}(p) = i\gamma_{\mu} \frac{\sin(ap_{\mu})}{a} + m.$$

Este se anula em $p_{\mu} = 0$ (físico) e em $p_{\mu} = \pi/a$ (dobra da zona). Em 4D isso produz $2^4 = 16$ férmions degenerados: a **duplicação** (*fermion doubling problem*).

Teorema de Nielsen-Ninomiya (1981): É impossível construir uma ação fermiônica na rede que seja simultaneamente:

1. Local,
2. Simétrica sob translações,
3. Hermitiana,

4. Quiralmente invariante,

sem dobras. Algum compromisso é inevitável.

2.5 Férmions de Wilson

Wilson propôs adicionar um termo que quebra simetria quiral explicitamente:

$$S_F^W = S_F^{\text{naïve}} - \frac{ar}{2} \sum_{n,\mu} \bar{\psi}(n) \square_\mu \psi(n),$$

onde $\square_\mu$ é um laplaciano discreto. As dobras recebem massa $\sim 1/a$ e desacoplam no contínuo. Custo: simetria quiral é quebrada explicitamente por $\mathcal{O}(a)$, gerando aditivo à massa do quark que deve ser ajustada ("*fine-tuning*").

2.6 Férmions Escalonados (Staggered, Kogut-Susskind)

Distribuem-se os graus fermiônicos em sítios distintos da célula elementar. Preservam simetria quiral remanescente $U(1)$, mas retêm 4 "*tastes*" de quarks por sabor físico. O truque "*rooting*" (extrair raiz quarta do determinante) é usado em larga escala, mas é matematicamente controverso.

2.7 Férmions de Domínio-Parede e Overlap

Descobertas dos anos 90: é possível contornar Nielsen-Ninomiya em 4D se a ação não for estritamente local, mas **exponencialmente local**. Os férmions de **domínio-parede** (Kaplan, Shamir 1992/3) e **overlap** (Neuberger 1998) realizam simetria quiral exata na rede (relação de Ginsparg-Wilson):

$$\{D, \gamma_5\} = a D \gamma_5 D,$$

recuperando $\{D, \gamma_5\} = 0$ no limite contínuo. São computacionalmente 10–100× mais caros, mas indispensáveis para estudar fenômenos quirais (condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, píons quase sem massa).

2.8 Integração Funcional via Monte Carlo

Na Lattice QCD:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{O} e^{-S_G - S_F}}{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_G - S_F}}.$$

A integração Grassmann sobre férmions é explícita:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\bar{\psi} D \psi} = \det D,$$

e o problema se reduz a um cálculo da integral:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{O}[U] \det D[U] e^{-S_G[U]}}{\int \mathcal{D}U \det D[U] e^{-S_G[U]}}.$$

Para N^4 sítios com $N = 64$, são $\sim 10^8$ variáveis de integração — inacessível analiticamente. A única via é **amostragem Monte Carlo**: gerar configurações $\{U\}$ distribuídas segundo $P[U] \propto e^{-S_G} \det D$ e estimar $\langle \mathcal{O} \rangle$ como média sobre a amostra.

2.9 Algoritmo Hybrid Monte Carlo (HMC)

O algoritmo padrão é o **Hybrid Monte Carlo** (Duane et al. 1987):

1. Introduzir momentos fictícios $P_\mu(n)$ para cada ligação.
2. Evoluir (U, P) por trajetórias de Hamilton determinísticas (*molecular dynamics*).
3. Aceitar/rejeitar via critério de Metropolis com detalhamento balanceado.

Para lidar com $\det D$ em férmions dinâmicos ("unquenched"), usa-se o truque pseudofermiônico:

$$\det D = \int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi e^{-\phi^\dagger (D D^\dagger)^{-1} \phi},$$

com ϕ bosônico auxiliar. Os avanços algorítmicos desde 2000 (Lüscher, Hasenbusch, DD-HMC, multigrid) tornaram viáveis cálculos com quarks **na massa física** do quark up e down — algo que parecia impossível há 20 anos.

2.10 Extração de Massas: Funções de Correlação

A medida fundamental é a função de correlação de dois pontos:

$$C(t) = \langle 0 | \mathcal{O}(t) \mathcal{O}^\dagger(0) | 0 \rangle = \sum_n |\langle 0 | \mathcal{O} | n \rangle|^2 e^{-E_n t}.$$

Para grandes t , o estado de mínima energia domina:

$$C(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A e^{-mt},$$

e a massa é extraída do decaimento exponencial. Por exemplo, para extrair a massa do pión, usa-se $\mathcal{O} = \bar{d}\gamma_5 u$. Gráficos de $-\frac{d \ln C(t)}{dt}$ vs. t exibem "plateaus" cujo valor é m — uma assinatura experimental-like na computação.

2.11 Ajuste ao Contínuo e ao Ponto Físico

Resultados numéricos são afetados por três erros sistemáticos principais:

1. **Discretização ($a \neq 0$):** Simulações em vários a (tipicamente $a \in [0.05, 0.12]$ fm) e extrapolação $a \rightarrow 0$ polinomial (tipicamente $\mathcal{O}(a^2)$).
2. **Volume finito ($L = Na$):** Em caixas pequenas, píons "sentem" a borda. Correções de volume finito são exponencialmente suprimidas, $\sim e^{-m_\pi L}$. Requer $m_\pi L \gtrsim 4$.
3. **Massa dos quarks:** Simulações eram feitas com quarks artificialmente pesados e extrapoladas à massa física usando **Chiral Perturbation Theory** (ChPT). Desde ~ 2010 , várias colaborações simulam diretamente na massa física ("physical point").

2.12 Resultados Principais

Espectro de hádrons. Massas de mésons e bárions leves calculadas ab-initio a partir de $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$, com α_s e massas de quarks como únicos inputs. O resultado histórico da colaboração BMW (Dürr et al., *Science* 2008) reproduziu o espectro hadrônico leve com precisão de $\sim 2\text{--}4\%$. Hoje, lattice fornece o **padrão de acurácia** para observáveis hadrônicos.

Confinamento. O potencial estático $V(r)$ entre um par $Q\bar{Q}$ pesado é medido via *loops de Wilson*:

$$W(R, T) = \langle \text{tr} \prod_{\text{loop}} U_\mu \rangle \rightarrow e^{-TV(R)}.$$

Resultado: $V(r) = -A/r + \sigma r$ para grandes r — **tensão de corda** $\sigma \approx (440 \text{ MeV})^2$, evidência direta e não-perturbativa do confinamento.

Quebra quiral. O condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx -(250 \text{ MeV})^3$ é medido diretamente, confirmando a quebra espontânea de $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$. Este mecanismo gera $\sim 99\%$ da massa dos núcleons (e portanto, da matéria visível).

Constantes de decaimento. f_π, f_K, f_B, f_{B_s} com precisão percentual — cruciais para extrair elementos da matriz CKM (V_{ub}, V_{cb}) a partir de decaimentos semileptônicos.

Estrutura do núcleon. Fator de forma axial, spin, momentos de distribuições partônicas. Permite, por exemplo, calcular g_A do decaimento beta do nêutron com precisão $< 1\%$.

Termodinâmica de QCD. Transição crossover quiral a $T_c \approx 156$ MeV, equação de estado para aplicações em colisões de íons pesados (RHIC, LHC) e cosmologia do universo primordial.

2.13 Problemas em Aberto

Problema do Sinal. A $\mu_B \neq 0$ (potencial químico bariônico não-nulo), $\det D$ torna-se complexo, e $e^{-S} \det D$ deixa de ser uma probabilidade. Isso impede simulações de Monte Carlo da matéria de quarks densa (interiores de estrelas de nêutrons, transição de fase no centro das colisões de íons pesados). Alternativas: expansão de Taylor em μ_B , reweighting, potencial químico imaginário, *complex Langevin*. Nenhuma plenamente satisfatória. Este é considerado o grande desafio aberto da lattice QCD.

Observáveis dependentes do tempo real. Correlações em tempo real (transporte, viscosidade do plasma quark-glúon) são *mal-postas* na formulação euclidiana e requerem continuação analítica a partir de dados discretos — um problema numérico mal-condicionado.

Custo computacional. Cálculos na massa física do quark u, d ainda consomem centenas de milhões de horas em supercomputadores. A linha da frente usa GPUs (NVIDIA A100/H100) e algoritmos de multigrid para inversão de D .

2.14 Impacto da Lattice QCD

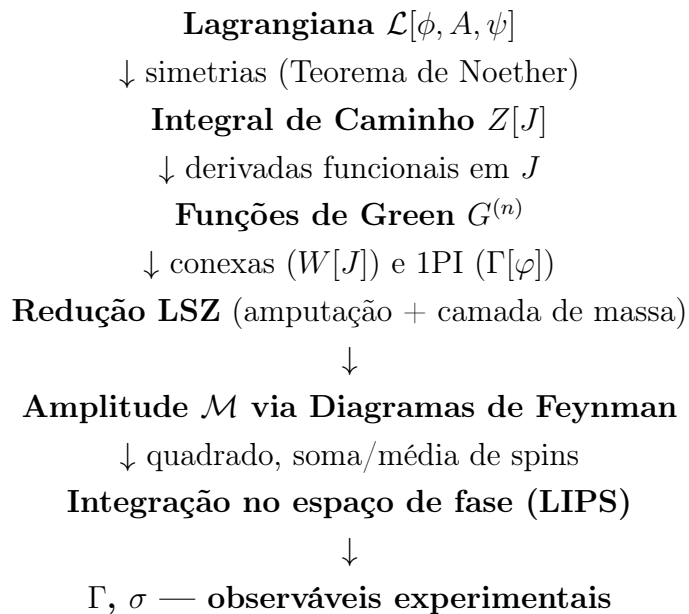
Lattice QCD transformou a QCD de uma teoria qualitativa em **quantitativa e preditiva**. Suas contribuições atuais incluem:

- Determinação de parâmetros fundamentais do MP (α_s , massas de quarks) com precisão competitiva com métodos perturbativos a altas energias.
- Cálculo **ab-initio** de elementos da matriz CKM: $|V_{us}|, |V_{cb}|, |V_{ub}|, |V_{td}|$.

- Predições para a anomalia $g - 2$ do múon: a contribuição hadrônica a a_μ (polarização hadrônica do vácuo) é o input dominante na incerteza teórica, e lattice é hoje competitiva com abordagens dispersivas.
- Espectroscopia exótica: tetraquarks, pentaquarks, *glueballs*.
- Conexão direta com experimentos: BaBar, Belle II, LHCb, BES III, entre outros, usam inputs de lattice para interpretar dados.

A lattice QCD é, sem exagero, uma **história de sucesso exemplar** do encontro entre QFT, física computacional e supercomputação. Demonstra que mesmo teorias intrinsecamente não-perturbativas podem ser atacadas com precisão arbitrária dados tempo de CPU e algoritmos suficientes. É a única via conhecida de conectar a Lagrangiana microscópica de quarks e glúons aos hádrons observados no laboratório — o **problema de confinamento**, um dos sete Problemas do Millennium do Clay Institute, em sua vertente computacional.

3 Mapa Conceitual: Da Lagrangiana ao Experimento



3.1 Considerações Finais

Os diagramas de Feynman encapsulam os princípios fundamentais da teoria quântica de campos, permitindo o cálculo rigoroso das grandezas físicas desde as interações em nível de árvore (tree-level) até as correções quânticas profundas (loops). Em resumo: A Lagrangiana impõe as simetrias, a Integral de Caminho quantiza o sistema, as funções

de Green codificam a dinâmica, a redução LSZ extrai a amplitude $\mathcal{M}$ e, finalmente, a integração no Espaço de Fase nos entrega as Seções de Choque σ e as taxas de decaimento Γ — os exatos números que os físicos comparam com as detecções nos grandes aceleradores como o LHC, Tevatron, LEP e outros.

Parte VIII

Consistência Quântica e Testes de Precisão

Esta parte aprofunda a consistência formal e os testes experimentais de alta precisão do Modelo Padrão: a derivação explícita da fórmula LSZ, exemplos adicionais de cálculo de amplitudes, a simetria BRST e identidades de Ward-Takahashi/Slavnov-Taylor, anomalias quirais e seu cancelamento, e correções eletrofracas de precisão via parâmetros oblíquos de Peskin-Takeuchi.

1 Derivação Explícita da Fórmula LSZ

A Fórmula de Redução de Lehmann-Symanzik-Zimmermann conecta funções de Green de campos interpolantes a elementos da matriz S . Esta seção desenvolve sua derivação passo a passo para um campo escalar.

1.1 Campos *in/out* e Hipótese Assintótica

Sejam $\phi_{\text{in}}(x)$ e $\phi_{\text{out}}(x)$ campos livres satisfazendo $(\square + m^2)\phi_{\text{in/out}} = 0$, interpretados como os campos físicos nos limites $t \rightarrow \mp\infty$. A hipótese assintótica de LSZ afirma que, no sentido fraco (matrizes de elementos entre estados normalizáveis):

$$\phi(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \sqrt{Z_\phi} \phi_{\text{in}}(x), \quad \phi(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sqrt{Z_\phi} \phi_{\text{out}}(x),$$

onde Z_ϕ é o resíduo do polo do propagador exato em $p^2 = m^2$:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle \xrightarrow{p^2 \rightarrow m^2} \frac{iZ_\phi}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \text{regular}.$$

Os operadores de criação dos estados assintóticos são:

$$a_{\text{in}}^\dagger(\vec{p}) = -i \int d^3x e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x), \quad \overleftrightarrow{\partial}_0 f \cdot g = f(\partial_0 g) - (\partial_0 f)g.$$

Um estado com n partículas incidentes é $|p_1, \dots, p_n; \text{in}\rangle = a_{\text{in}}^\dagger(\vec{p}_1) \cdots a_{\text{in}}^\dagger(\vec{p}_n)|0\rangle$.

1.2 Redução de Uma Partícula

Considere o elemento de matriz

$$\langle \text{out} | a_{\text{in}}^\dagger(\vec{p}_1) | \alpha; \text{in} \rangle,$$

onde $|\alpha; \text{in}\rangle$ é qualquer estado *in*. Subtraindo e somando $a_{\text{out}}^\dagger(\vec{p}_1)$:

$$\langle \text{out} | a_{\text{in}}^\dagger(\vec{p}_1) | \alpha; \text{in} \rangle = \langle \text{out} | a_{\text{out}}^\dagger(\vec{p}_1) | \alpha; \text{in} \rangle + \langle \text{out} | \left[a_{\text{in}}^\dagger(\vec{p}_1) - a_{\text{out}}^\dagger(\vec{p}_1) \right] | \alpha; \text{in} \rangle.$$

O primeiro termo é um estado *out* deslocado que contribui apenas para o termo trivial δ_{fi} . O segundo termo é a parte interessante, e usa-se a identidade (obtida por integração por partes):

$$a_{\text{out}}^\dagger(\vec{p}) - a_{\text{in}}^\dagger(\vec{p}) = -\frac{i}{\sqrt{Z_\phi}} \int d^4x e^{-ip \cdot x} (\square + m^2) \phi(x),$$

válida *dentro* de elementos de matriz assintóticos. O operador $(\square + m^2)$, aplicado ao campo interpolante ϕ , extrai exatamente o resíduo do polo de camada de massa.

1.3 Iteração e Forma Final

Iterando esse procedimento para cada perna externa (incidente e emergente), obtém-se a **Fórmula LSZ completa**:

$$\begin{aligned} \langle k_1 \dots k_m; \text{out} | p_1 \dots p_n; \text{in} \rangle_c = & \left(\frac{i}{\sqrt{Z_\phi}} \right)^{n+m} \prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{-ip_i \cdot x_i} (\square_{x_i} + m^2) \\ & \times \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{+ik_j \cdot y_j} (\square_{y_j} + m^2) \\ & \times \langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \phi(y_1) \cdots \phi(y_m) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

1.4 Interpretação Diagramática

No espaço de momentos, $(\square + m^2)$ torna-se $-(p^2 - m^2)$, que cancela o propagador externo $i/(p^2 - m^2)$. O efeito da fórmula LSZ é, portanto:

1. **Amputar** todos os propagadores das pernas externas.
2. Dividir cada perna por $\sqrt{Z_\phi}$ (absorvido nos contratermos em teorias renormalizadas).
3. **Projetar** na camada de massa ($p_i^2 = m^2$).

1.5 Generalização: Férmions e Bósons Vetoriais

Para um férmion de Dirac, o operador de amputação é $(i\cancel{\partial}_x - m)$, contraído com os espinores apropriados:

$$\langle \cdots | S | p, s; \text{in} \rangle \supset \frac{i}{\sqrt{Z_\psi}} \int d^4x e^{-ip \cdot x} \bar{u}^s(p) [i\cancel{\partial}_x - m] \langle 0 | T \cdots \psi(x) | 0 \rangle.$$

Para um bóson vetorial massivo de polarização λ :

$$\langle \cdots | S | p, \lambda; \text{in} \rangle \supset \frac{i}{\sqrt{Z_V}} \int d^4x e^{-ip \cdot x} \epsilon^{*\mu}(p, \lambda) [(\square + m_V^2)\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu] \langle 0 | T \cdots V^\nu(x) | 0 \rangle.$$

Para o fóton ($m_V = 0$), a conservação da corrente $p_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$ (identidade de Ward) simplifica a contração, e somente as duas polarizações transversas contribuem fisicamente.

2 Exemplos Adicionais de Cálculo de Amplitudes

2.1 Espalhamento Bhabha: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

Em QED, o espalhamento Bhabha envolve dois diagramas distintos: **canal s** (aniquilação-criação via fóton virtual) e **canal t** (troca de fóton direto).

Diagrama canal s :

$$i\mathcal{M}_s = (-ie)^2 \bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{s} \bar{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4).$$

Diagrama canal t :

$$i\mathcal{M}_t = -(-ie)^2 \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{t} \bar{v}(p_2)\gamma^\nu v(p_4),$$

com o sinal relativo negativo devido à troca de férmions idênticos (estatística de Fermi).

Amplitude total ao quadrado: Após soma/média sobre spins, no limite ultrarrelativístico $s, |t|, |u| \gg m_e^2$:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left[\frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{u^2 + s^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st} \right],$$

onde o terceiro termo provém da interferência s - t . A seção de choque diferencial é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{u^2 + s^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st} \right].$$

2.2 Espalhamento Møller: $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$

Envolve apenas canais t e u (férmions idênticos no estado final), com sinal relativo negativo entre eles.

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{t} \bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) - \bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{u} \bar{u}(p_3)\gamma^\nu u(p_2) \right].$$

No limite ultrarrelativístico:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right],$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right].$$

2.3 Processo Drell-Yan: $q\bar{q} \rightarrow \ell^+\ell^-$

O processo Drell-Yan é o principal mecanismo de produção de pares leptônicos em colisores hadrônicos, fundamental para medidas de precisão eletrofraca, busca de bósons Z' e testes da estrutura partônica do próton.

Amplitude partônica (via γ^*):

$$i\mathcal{M}_\gamma = (-ieQ_q)(-ie) \bar{v}(p_{\bar{q}})\gamma^\mu u(p_q) \frac{-ig_{\mu\nu}}{\hat{s}} \bar{u}(p_{\ell^-})\gamma^\nu v(p_{\ell^+}),$$

com Q_q a carga elétrica do quark e $\hat{s}$ a energia quadrática partônica.

Amplitude partônica (via Z):

$$i\mathcal{M}_Z = \left(\frac{-ig}{\cos \theta_W} \right)^2 \bar{v}(p_{\bar{q}}) \gamma^\mu (g_V^q - g_A^q \gamma^5) u(p_q) \frac{-i[g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_Z^2]}{\hat{s} - m_Z^2 + im_Z \Gamma_Z} \bar{u}(p_\ell^-) \gamma^\nu (g_V^\ell - g_A^\ell \gamma^5) v(p_\ell^+),$$

onde Γ_Z é a largura total do Z , crucial para regularizar o polo no pico de ressonância.

Seção de choque partônica (contribuição do γ^* , sem massas):

$$\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow \ell^+ \ell^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}} \frac{Q_q^2}{N_c},$$

onde $N_c = 3$ é o fator médio de cor (média sobre as $3 \times 3 = 9$ combinações de cor iniciais, das quais apenas 3 contribuem).

Seção de choque hadrônica:

$$\sigma(pp \rightarrow \ell^+ \ell^- + X) = \sum_q \int dx_1 dx_2 [f_q(x_1, \mu_F^2) f_{\bar{q}}(x_2, \mu_F^2) + (1 \leftrightarrow 2)] \hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow \ell^+ \ell^-),$$

onde $f_q(x, \mu_F^2)$ são as **Funções de Distribuição Partônica (PDFs)** que codificam a probabilidade de encontrar um quark de sabor q carregando uma fração x do momento do próton na escala de fatorização μ_F .

Ressonância Z : Na região $\hat{s} \approx m_Z^2$, a contribuição via Z domina, fornecendo um pico estreito (de largura $\Gamma_Z \approx 2.5$ GeV) fundamental para a medição da massa do Z e do ângulo de Weinberg. A razão

$$A_{\text{FB}} = \frac{\sigma(\cos \theta > 0) - \sigma(\cos \theta < 0)}{\sigma(\cos \theta > 0) + \sigma(\cos \theta < 0)}$$

(assimetria forward-backward) mede diretamente a combinação $g_V^q g_A^q g_V^\ell g_A^\ell$ e forneceu uma das medidas mais precisas de $\sin^2 \theta_W$ no LEP e Tevatron.

3 Simetria BRST e Identidades de Ward-Takahashi

A invariância de gauge, ao ser fixada via procedimento de Faddeev-Popov, é substituída por uma simetria global residual mais profunda: a **simetria BRST** (Becchi-Rouet-Stora-

Tyutin). Essa simetria encapsula todo o conteúdo quântico da invariância de gauge e gera as identidades que garantem renormalizabilidade e unitariedade.

3.1 Transformações BRST

Para uma teoria de Yang-Mills com campos A_μ^a , fantasmas c^a , antifantasmas $\bar{c}^a$ e um campo auxiliar B^a (campo de Nakanishi-Lautrup), as transformações BRST são parametrizadas por um parâmetro de Grassmann global θ (anticomutante):

$$\begin{aligned}\delta_{\text{BRST}} A_\mu^a &= \theta (D_\mu c)^a = \theta (\partial_\mu c^a + g f^{abc} A_\mu^b c^c), \\ \delta_{\text{BRST}} c^a &= -\frac{1}{2} \theta g f^{abc} c^b c^c, \\ \delta_{\text{BRST}} \bar{c}^a &= \theta B^a, \\ \delta_{\text{BRST}} B^a &= 0, \\ \delta_{\text{BRST}} \psi &= i \theta g c^a T^a \psi.\end{aligned}$$

A transformação em A_μ é exatamente uma transformação de gauge com parâmetro θc^a , e o fantasma c^a assume o papel de parâmetro de gauge dinâmico.

3.2 Nilpotência: $Q^2 = 0$

Definindo a **carga BRST** Q via $\delta_{\text{BRST}} \Phi = \theta [Q, \Phi]_\pm$, uma propriedade crucial é a nilpotência:

$$Q^2 = 0.$$

Essa propriedade segue da identidade de Jacobi $f^{ade} f^{bcd} + \text{perm.} = 0$ e é a chave para a estrutura cohomológica: os estados físicos são definidos como

$$|\Psi_{\text{fis}}\rangle \in \ker(Q) / \text{Im}(Q),$$

ou seja, a cohomologia de Q . Estados exatos ($|\Psi\rangle = Q|\Lambda\rangle$) têm norma zero e desacoplam, enquanto estados fechados ($Q|\Psi\rangle = 0$) módulo exatos constituem o espaço físico. Isso generaliza e sistematiza o procedimento de Gupta-Bleuler.

3.3 Lagrangiana BRST-Invariante

A Lagrangiana total (Yang-Mills + gauge-fixing + fantasmas) pode ser escrita compactamente:

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \delta_{\text{BRST}} \Psi[A, \bar{c}, B],$$

onde Ψ é uma *função auxiliar*. Para gauge de Lorenz generalizado:

$$\Psi = \bar{c}^a \left(\partial^\mu A_\mu^a + \frac{\xi}{2} B^a \right),$$

produzindo automaticamente os termos de fixação de gauge e de fantasma. A invariância BRST da ação total é então manifesta, uma vez que $\delta_{\text{BRST}} \mathcal{L}_{\text{YM}} = 0$ e $\delta_{\text{BRST}}(\delta_{\text{BRST}} \Psi) = 0$ por nilpotência.

3.4 Identidades de Slavnov-Taylor

A invariância BRST do funcional gerador implica:

$$\langle \delta_{\text{BRST}} \mathcal{O} \rangle = 0,$$

para qualquer operador $\mathcal{O}$. Aplicado ao funcional $Z[J]$, isso gera as **identidades de Slavnov-Taylor**, que relacionam diferentes funções de Green e impõem restrições não-triviais à renormalização: as divergências devem ser canceladas por contratermos que *preservem* a estrutura BRST.

3.5 Identidades de Ward-Takahashi (caso abeliano)

Em QED (caso abeliano), a simetria BRST se reduz à forma mais simples da invariância de gauge. A identidade de Ward-Takahashi para a função de vértice fermion-fóton $\Gamma^\mu(p, p')$ e a auto-energia do elétron $\Sigma(p)$ é:

$$(p - p')_\mu \Gamma^\mu(p, p') = S_F^{-1}(p) - S_F^{-1}(p'),$$

onde S_F é o propagador exato do elétron. Em particular, no limite $p = p'$:

$$\Gamma^\mu(p, p) = \frac{\partial S_F^{-1}(p)}{\partial p_\mu},$$

o que implica uma relação exata entre as constantes de renormalização: $Z_1 = Z_2$. Essa identidade é a razão pela qual a carga elétrica renormalizada é universal: $e_R = Z_1^{-1} Z_2 \sqrt{Z_3} e_B = \sqrt{Z_3} e_B$, com o $\sqrt{Z_3}$ determinado unicamente pela renormalização do fóton.

3.6 Consequências Físicas

- **Unitariedade:** A estrutura cohomológica $Q^2 = 0$ garante que apenas estados de norma positiva (polarizações transversas) contribuem aos processos físicos; fantasmas e polarizações longitudinais/escalares cancelam-se em pares entre diagramas.
- **Renormalizabilidade:** As identidades de Slavnov-Taylor restringem a forma dos contratermos; a renormalizabilidade do MP não-abeliano (t'Hooft, 1971) depende crucialmente da preservação dessas identidades no processo de regularização.
- **Independência de gauge:** As quantidades físicas (elementos da matriz S na camada de massa) são independentes do parâmetro ξ de gauge, embora funções de Green *off-shell* dependam explicitamente dele.

4 Anomalias Quirais e Cancelamento no Modelo Padrão

Uma simetria clássica pode ser quebrada pelo processo de quantização se sua corrente de Noether não puder ser definida de modo a preservar simultaneamente essa simetria e a invariância de gauge. Isso é uma **anomalia quântica**. Quando a simetria anômala é global, a anomalia é física e observável (ex.: decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$); quando é local (de gauge), a anomalia **deve cancelar-se**, sob pena de destruir unitariedade e renormalizabilidade.

4.1 Anomalia ABJ (Adler-Bell-Jackiw)

Considere a corrente axial em QED, $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$. Classicamente, para férmions sem massa, $\partial_\mu j_5^\mu = 0$. Entretanto, o cálculo do triângulo fermiônico com duas pernas vetoriais e uma axial (diagrama ABJ) produz:

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \frac{e^2}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}.$$

Essa anomalia é exata a um-loop (teorema de Adler-Bardeen: não há correções de ordem superior). Fenomenologicamente, explica o decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ com precisão percentual, fornecendo uma das validações mais elegantes da QCD a baixa energia (com $N_c = 3$ essencial).

4.2 Anomalias Não-Abelianas e o Triângulo $[T^a, T^b, T^c]$

Para correntes associadas a geradores T^a de um grupo de gauge, o diagrama triangular com três correntes $\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi$ gera a anomalia não-abeliana, proporcional a

$$\mathcal{A}^{abc} = \text{tr} [T^a \{T^b, T^c\}]_{\text{quiral}}.$$

Se um dos geradores é γ^5 -valorado (quiral), a anomalia contribui à divergência da corrente correspondente. Em teorias de gauge quirais como o MP, essa quantidade **deve anular-se** para preservar invariância de gauge quântica.

4.3 Condição de Cancelamento no Modelo Padrão

No Modelo Padrão, as potenciais anomalias envolvem combinações dos geradores de $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$. Os diagramas triangulares não-nulos são:

- $[SU(3)]^2 \times U(1)_Y$: requer $\sum_{\text{quarks}} Y = 0$.
- $[SU(2)]^2 \times U(1)_Y$: requer $\sum_{\text{dubletos}} Y = 0$.
- $[U(1)_Y]^3$: requer $\sum_{\text{férmions}} Y^3 = 0$.
- Anomalia gravitacional mista $[\text{grav}]^2 \times U(1)_Y$: requer $\sum_{\text{férmions}} Y = 0$.

4.4 Verificação Explícita por Geração

Para uma geração do MP, somando sobre todos os férmions esquerdos e direitos (com hipercargas $Y = Q - T_3$):

$[SU(3)]^2 \times U(1)$: Apenas quarks contribuem. Traço sobre T_3 -singletos ponderado por Y :

$$2 \cdot Y_{Q_L} - Y_{u_R} - Y_{d_R} = 2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0. \checkmark$$

(O fator 2 vem dos componentes up/down do dubleto.)

$[SU(2)]^2 \times U(1)$: Apenas dubletos esquerdos contribuem:

$$N_c Y_{Q_L} + Y_{L_L} = 3 \cdot \frac{1}{6} + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \checkmark$$

$[U(1)]^3$: Soma de Y^3 sobre todos os férmions quirais, com sinal oposto para R :

$$2N_c Y_{Q_L}^3 - N_c(Y_{u_R}^3 + Y_{d_R}^3) + 2Y_{L_L}^3 - Y_{e_R}^3 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{216} - 3\left(\frac{8}{27} - \frac{1}{27}\right) + 2\left(-\frac{1}{8}\right) - (-1) = 0. \checkmark$$

Anomalia gravitacional:

$$2N_c Y_{Q_L} - N_c(Y_{u_R} + Y_{d_R}) + 2Y_{L_L} - Y_{e_R} = 1 - 1 - 1 + 1 = 0. \checkmark$$

4.5 Significado Profundo

O cancelamento das anomalias de gauge no MP   **milagroso** do ponto de vista de uma teoria com $\{Q_L, u_R, d_R, L_L, e_R\}$: os números quânticos precisam obedecer exatamente a relações não-triviais. Essa condi   o   uma das motiva   es para a hipótese de **Grande Unifica   o (GUT)**: em $SU(5)$ ou $SO(10)$, todos os férmions de uma gera   o estão em representa    es únicas, e o cancelamento torna-se automaticamente garantido pela estrutura de grupo. A existência de três gera    es replica o cancelamento independentemente.

Consequência prática: Se adicionássemos ao MP um férmion quiral singlete (ex.: um neutrino destrógiro com $Y \neq 0$), as anomalias quebrariam a invariância de gauge. Isso restringe severamente extens   es do MP, e explica por que neutrinos destrógiros, se existirem, devem ser **singletos** de hipercarga nula.

5 Corre    es Eletrofracas de Precis   o: Parâmetros S , T , U

Nas últimas décadas, experimentos como LEP, SLC, Tevatron e LHC forneceram medidas de observáveis eletrofracos com precis  o de fra    es de 1%, permitindo testar o MP *em nível quântico* e limitar contribui    es de nova física. Os **parâmetros oblíquos** S , T , U (Peskin-Takeuchi, 1990) codificam, de forma econ mica, os efeitos de nova física que se propagam via corre    es às auto-energias dos bósons de gauge.

5.1 Motiva    o: Corre    es Oblíquas vs. V rtex

Contribui    es de nova física ao MP podem entrar de dois modos:

1. **Corre    es de v rtice/caixa:** envolvem novas partículas acoplando diretamente a férmions externos (ex.: v rtice $Zb\bar{b}$).

2. **Correções oblíquas:** partículas pesadas correm em loops das auto-energias dos bósons W, Z, γ , sem acoplar aos férmions externos. Estas contribuições são *universais* no sentido de afetar todos os observáveis eletrofracos via os propagadores dos bósons.

Os parâmetros S, T, U parametrizam exatamente a segunda classe, e são úteis quando a nova física é pesada ($M_{\text{NP}} \gg m_Z$) e não introduz correntes fora das diagonais ou não-universalidade fermiônica.

5.2 Definição a Partir das Auto-Energias

Sejam $\Pi_{VV'}^{\mu\nu}(q^2) = g^{\mu\nu}\Pi_{VV'}(q^2) + q^\mu q^\nu$ (termos) as auto-energias transversas entre bósons $V, V' \in \{W, Z, \gamma\}$. Os parâmetros de Peskin-Takeuchi são definidos por:

$$\begin{aligned}\alpha S &= 4 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W \left. \frac{\Pi_{ZZ}(m_Z^2) - \Pi_{ZZ}(0)}{m_Z^2} - \dots \right|_{\text{new physics}}, \\ \alpha T &= \left. \frac{\Pi_{WW}(0)}{m_W^2} - \frac{\Pi_{ZZ}(0)}{m_Z^2} \right|_{\text{new physics}}, \\ \alpha U &= 4 \sin^2 \theta_W \left[\left. \frac{\Pi_{WW}(m_W^2) - \Pi_{WW}(0)}{m_W^2} - \cos^2 \theta_W \frac{\Pi_{ZZ}(m_Z^2) - \Pi_{ZZ}(0)}{m_Z^2} - \dots \right] \right|_{\text{new physics}}.\end{aligned}$$

O índice "new physics" indica que se subtrai a contribuição do MP, isolando os efeitos de física além do MP. Por construção, $S = T = U = 0$ no MP de referência.

5.3 Interpretação Física

Parâmetro T : Mede a violação da simetria custodial $SU(2)_V$ em setores de nova física. Está diretamente ligado ao parâmetro ρ :

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1 + \alpha T.$$

Contribuições a T surgem de splittings de massa em doublets (ex.: diferença $m_t - m_b$ no MP dá $T_{\text{MP}} \neq 0$ quando referenciado a uma massa de Higgs m_H^{ref}). Setores com partículas carregando isospin fraco e splittings grandes em massa contribuem positivamente.

Parâmetro S : Mede a contribuição quiral de nova física ao running Z - γ . Uma 4ª geração de férmions pesados (com massas degeneradas) daria $\Delta S \approx 2/(3\pi) \cdot N_{\text{gen}} \approx 0.2$ por geração, excluindo tecnologias simples de 4ª geração.

Parâmetro U : Geralmente pequeno quando a nova física é pesada (supressão m_W^2/M^2). Na prática, muitas análises fixam $U = 0$.

5.4 Valores Experimentais Atuais

Ajustes globais combinando m_W , m_Z , Γ_Z , $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, assimetrias A_{FB} , R_b , etc., produzem (com referências $m_H = 125$ GeV, $m_t = 173$ GeV):

$$S = 0.05 \pm 0.08, \quad T = 0.09 \pm 0.07, \quad U = 0.01 \pm 0.11,$$

altamente consistentes com zero, confirmando a enorme robustez do Modelo Padrão.

5.5 Aplicação a Extensões do MP

Dubleto de Higgs extra (2HDM): Contribui a T se houver splittings entre os estados $H^\pm, A^0, H^0$. A combinação alinhada ($m_{H^\pm} = m_A$) reduz a contribuição.

Escalares supersimétricos: Stops e sbottoms pesados com pequeno mistura levam a contribuições positivas a T , podendo melhorar a concordância em alguns cenários.

Bósons Z' extras: Contribuições a S via mistura cinética $B - Z'$, restringidas pelos dados eletrofracos. Em muitos modelos, limites diretos do LHC são atualmente mais fortes.

Setores confinantes (technicolor): Previsões originais davam $S \sim +0.3$ por *techni-doublet*, excluindo as versões mais simples desde as medidas de LEP-I.

5.6 Significado Conceitual

Os parâmetros S , T , U ilustram dois pontos profundos:

1. **MP como teoria efetiva:** Correções oblíquas são exatamente os coeficientes de Wilson da teoria efetiva SMEFT (Standard Model Effective Field Theory), quando a nova física é integrada fora. Em notação SMEFT, $T \leftrightarrow C_{\phi D}$ e $S \leftrightarrow C_{\phi WB}$ (operadores dim-6).
2. **Poder dos testes de precisão:** Não é necessário produzir diretamente as novas partículas para limitá-las. Medidas percentuais dos bósons W e Z restringem escalas

de nova física a $\Lambda \gtrsim 1 - 10$ TeV para muitos modelos, complementando buscas diretas.

Previsão de m_H antes da descoberta: Historicamente, a ausência de contribuições a S, T além do MP com massa de Higgs leve permitiu prever $m_H \lesssim 150$ GeV com base apenas em dados eletrofracos, muito antes da descoberta direta do Higgs em 125 GeV em 2012 no LHC — uma das validações mais notáveis do programa de precisão do MP.

Parte IX

Física Além do Modelo Padrão

O Modelo Padrão é, sem dúvida, a teoria física mais testada e bem-sucedida da história. Suas previsões concordam com o experimento em precisão que chega a 12 algarismos significativos (momento magnético anômalo do elétron), e todas as 17 partículas fundamentais previstas foram descobertas, culminando com o bóson de Higgs em 2012. Entretanto, **o MP é indiscutivelmente incompleto**. Há evidências observacionais diretas (matéria escura, oscilações de neutrinos, assimetria bariônica, energia escura) e questões teóricas fundamentais (hierarquia, unificação, quantização da gravidade) que apontam para nova física. Esta parte é dedicada às extensões mais estudadas e à física além do MP.

1 Matéria Escura e Cosmologia de Partículas

Dos cerca de 95% de conteúdo energético do universo não explicados pelo MP, aproximadamente 27% é **matéria escura** — uma componente não-bariônica, não-luminosa, cujas evidências gravitacionais são abundantes e múltiplas, mas cuja natureza microscópica permanece desconhecida. A busca por identificar a partícula (ou partículas) constituintes da matéria escura é um dos principais motores da física de partículas experimental atual.

1.1 As Evidências Gravitacionais

As evidências de matéria escura provêm de escalas espaciais que cobrem **mais de 20 ordens de magnitude**, sempre *via* efeitos gravitacionais, nunca via interações do MP.

Curvas de rotação galácticas (Rubin et al., 1970s). A velocidade orbital de estrelas em galáxias espirais deveria cair como $v \propto r^{-1/2}$ a grandes raios (lei de Kepler aplicada

à massa visível). Observações consistentes mostram:

$$v(r) \rightarrow \text{constante}, \quad r \rightarrow \infty,$$

requerendo um halo esférico de massa invisível com $\rho_{\text{DM}}(r) \sim 1/r^2$.

Lentes gravitacionais. A curvatura de feixes de luz por aglomerados de galáxias revela distribuições de massa *muito maiores* que a massa luminosa. Casos extremos: Bullet Cluster (1E 0657-56, 2006) — dois aglomerados em colisão, onde a massa (inferida por lente gravitacional fraca) está espacialmente **deslocada** do gás ordinário (visto em raios-X). Evidência *direta* e incontornável de matéria não-bariônica interagindo predominantemente por gravitação.

Anisotropias do CMB. O espectro de potência de anisotropias do fundo cósmico de microondas (medido por COBE, WMAP, Planck) tem picos acústicos cuja razão de alturas é sensível à quantidade de matéria bariônica vs. matéria total. Resultado (Planck 2018):

$$\Omega_b h^2 = 0.02237 \pm 0.00015, \quad \Omega_m h^2 = 0.1430 \pm 0.0011,$$

de onde $\Omega_{\text{DM}}/\Omega_b \approx 5.4$. Cinco vezes mais matéria escura que bariônica.

Formação de estrutura em larga escala. A estrutura filamentar observada (redshift surveys como SDSS, 2dFGRS) só se forma se matéria escura *fria* (CDM — *Cold Dark Matter*) está presente para iniciar o colapso gravitacional antes da recombinação. Matéria escura quente (neutrinos) apagaria estrutura em pequenas escalas (*free-streaming*), contradizendo observações.

Nucleossíntese primordial (BBN). A abundância de D, ^3He , ^4He , ^7Li depende de $\Omega_b h^2$. Concordância com observações requer $\Omega_b h^2 \approx 0.022$ — bariônicos são só 4.8% do universo total. O resto, não-bariônico.

Pilar Λ CDM. Todas essas evidências se encaixam consistentemente no modelo padrão cosmológico Λ CDM:

$$\Omega_\Lambda \approx 0.685, \quad \Omega_{\text{DM}} \approx 0.265, \quad \Omega_b \approx 0.049, \quad \Omega_r \approx 10^{-4}.$$

A matéria escura é **estabelecida observacionalmente**. O que falta é identificar sua natureza.

1.2 Propriedades Requeridas

A matéria escura deve:

1. Ser **estável** em escalas cosmológicas ($\tau_{\text{DM}} \gtrsim 10^{26}$ s).
2. Ser **não-luminosa** (sem acoplamento significativo a fótons).
3. Ter **interação fraca com matéria ordinária** (consistente com limites de detecção direta).
4. Ser **não-relativística no desacoplamento** (CDM) — ou com velocidades baixas, pelo menos.
5. Reproduzir $\Omega_{\text{DM}} h^2 \approx 0.12$ via algum mecanismo de produção cosmológica.

Nenhuma partícula do MP satisfaz todos os requisitos. Neutrinos do MP são relativísticos no desacoplamento (HDM) e suprimem estrutura — excluídos como DM dominante.

1.3 Candidatos Principais

WIMPs (*Weakly Interacting Massive Particles*). Partículas com massa $\sim \text{GeV–TeV}$ e interação fraca. O candidato historicamente dominante. Exemplo paradigmático: **neutralino** supersimétrico (LSP estável).

Milagre do WIMP: se uma partícula χ com massa $m_\chi \sim 100 \text{ GeV}$ aniquila via interação fraca, $\sigma v \sim G_F^2 m_\chi^2 \sim 10^{-26} \text{ cm}^3/\text{s}$. A densidade relíquia após *freeze-out* térmico é:

$$\Omega_\chi h^2 \approx \frac{3 \times 10^{-27} \text{ cm}^3/\text{s}}{\langle \sigma v \rangle} \approx 0.1,$$

exatamente o valor observado. Essa coincidência — que parâmetros da escala eletrofraca produzem naturalmente a densidade cosmológica certa — motivou décadas de buscas por WIMPs.

Áxions. Pseudo-escalar ultraleve ($m_a \sim \mu\text{eV–meV}$) do mecanismo de Peccei-Quinn para resolver o problema de CP forte (seção BRST/Anomalias). Acoplamento $a G\tilde{G}$ controlado por $f_a \gtrsim 10^9 \text{ GeV}$. Produção cosmológica via oscilações coerentes do campo axiônico (*misalignment mechanism*). Densidade:

$$\Omega_a h^2 \sim 0.12 \left(\frac{f_a}{10^{12} \text{ GeV}} \right)^{7/6}.$$

Neutrinos estéreis. Neutrinos destrógiros leves ($\sim \text{keV}$) misturados levemente com os ativos. Produzidos não-termicamente (mecanismo Dodelson-Widrow, Shi-Fuller). Podem explicar anomalias em raios-X (linha de 3.5 keV controversa).

Matéria escura primordial via buracos negros (PBHs). Buracos negros formados no universo primordial podem contribuir à DM. Janelas de massa permitidas se estreitaram com LIGO/Virgo, mas $\sim 10^{-12}$ – $10^{-10} M_\odot$ ainda possível.

Matéria escura ultraleve (*fuzzy DM*). Bósons com $m \sim 10^{-22} \text{ eV}$ — comprimento de onda de Compton galáctico. Suprime estrutura em pequena escala, pode resolver tensões com simulações ΛCDM .

SIMPs, SuperWIMPs, WIMPzillas, *asymmetric DM*, portais escuros, *dark photons*, ... Zoologia vasta de candidatos teóricos. Nenhuma evidência clara até o momento.

1.4 Freeze-Out Térmico: Cálculo da Relíquia

Para uma partícula χ em equilíbrio térmico no universo primordial, a equação de Boltzmann governa a densidade n_χ :

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3Hn_\chi = -\langle\sigma v\rangle (n_\chi^2 - n_\chi^{\text{eq}2}).$$

Enquanto $\Gamma_{\text{ann}} = n_\chi\langle\sigma v\rangle \gg H$, segue-se $n_\chi \approx n_\chi^{\text{eq}}$, seguindo o equilíbrio de Maxwell-Boltzmann. Quando $\Gamma_{\text{ann}} \sim H$, a aniquilação "congela" e n_χ fica fixo em unidades comóveis — este é o **freeze-out**. Ocorre a $x_f \equiv m_\chi/T_f \sim 20$ – 30 (tipicamente).

A densidade relíquia é, aproximadamente:

$$\Omega_\chi h^2 \approx \frac{1.07 \times 10^9 \text{ GeV}^{-1}}{M_P} \frac{x_f}{\sqrt{g_*(x_f)}} \frac{1}{\langle\sigma v\rangle}.$$

Para $\langle\sigma v\rangle \approx 3 \times 10^{-26} \text{ cm}^3/\text{s}$: $\Omega_\chi h^2 \approx 0.12$. Este é o milagre do WIMP.

1.5 Estratégias de Detecção

Três frentes experimentais complementares:

Detecção direta. WIMP do halo local ($\rho_{\text{DM}} \approx 0.4 \text{ GeV/cm}^3$, $v \sim 220 \text{ km/s}$) espalha em núcleos de um detector de baixo ruído. Taxa:

$$R \sim n_\chi \sigma_{\chi N} v \sim 10^{-5} - 10^{-1} \text{ eventos/kg/dia.}$$

Experimentos-chave: XENONnT, LUX-ZEPLIN (LZ), PandaX-4T (xenônio líquido); SuperCDMS, CRESST (baixa massa); DAMA/LIBRA (modulação sazonal, controverso). Limites atuais excluem $\sigma_{\chi p} > 10^{-47} \text{ cm}^2$ para $m_\chi \sim 30 \text{ GeV}$. **A janela WIMP está se fechando** — tensão crescente com o cenário "milagroso".

Detecção indireta. Produtos de aniquilação de DM (γ , e^+ , $\bar{p}$, ν) em regiões de alta densidade (centro galáctico, halos de anãs esferoidais, sol). Experimentos: Fermi-LAT, HESS/MAGIC/VERITAS (raios- γ), AMS-02 (antipartículas), IceCube (ν). Sinais ambíguos discutidos: *Galactic Center Excess*, *3.5 keV line*, anomalia de antiprótons.

Produção em colisores. LHC busca eventos com **momento faltante** + jatos/fótons/léptons (*mono-X*), assinatura de produção de DM + estado visível. Não há evidência até agora; limites fortes em modelos específicos (simplificados e UV-completos como SUSY).

1.6 Crise do Paradigma WIMP?

Após quatro décadas de buscas, **nenhuma evidência direta ou indireta inequívoca de WIMPs**. O espaço de parâmetros está crescentemente restrito. Isso motivou uma reorientação:

- Maior ênfase em **áxions** (ADMX, ABRACADABRA, MADMAX, IAXO).
- **Detecção direta de baixa massa** ($m_\chi \lesssim 1 \text{ GeV}$): SENSEI, DAMIC, phonons em cristais.
- **Portais escuros**: setor escuro acoplado por novo mediador (dark photon, dark Higgs). Experimentos: LDMX, DarkQuest, SHiP.
- **DM primordial via ondas gravitacionais** (LISA, futuros detectores).

Alternativas gravitacionais (MOND). MOND (Milgrom 1983) modifica a gravidade para $a < a_0 \sim 10^{-10} \text{ m/s}^2$, reproduzindo curvas de rotação sem matéria escura. **Limitação crítica:** MOND falha para aglomerados (Bullet Cluster é evidência clara de matéria não-bariônica) e não explica picos do CMB. Hoje é posição minoritária; matéria escura é considerada real.

1.7 Problemas em Pequena Escala do Λ CDM

Simulações N-body com CDM puro preveem estruturas em pequena escala que *tensionam* observações:

- **Core-cusp:** Λ CDM prediz *cusps* centrais em galáxias anãs; observações favorecem *cores*.
- **Missing satellites:** Λ CDM prediz milhares de satélites de galáxias grandes; observados ~ 50 para a Via Láctea.
- **Too big to fail:** satélites mais massivos preditos não existem como observados.

Resolução: feedback bariônico (*supernovae*, AGN), ou DM não-CDM (fuzzy DM, WDM, SIDM — *self-interacting dark matter*).

1.8 Energia Escura: O Outro 68%

Além da matéria escura, 68% do universo é **energia escura** — responsável pela expansão acelerada (descoberta 1998, Perlmutter-Riess-Schmidt, Nobel 2011). Mais consistente com constante cosmológica Λ :

$$w \equiv p/\rho = -1.028 \pm 0.031 \quad (\text{Planck} + \text{SN} + \text{BAO}).$$

Problema da constante cosmológica. Estimativas teóricas ingênuas dão $\rho_{\Lambda}^{\text{QFT}} \sim M_P^4 \sim 10^{74} \text{ GeV}^4$, vs. observado $\rho_{\Lambda}^{\text{obs}} \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$. **Discrepância de 120 ordens de magnitude.** Nenhuma solução estabelecida. Tratado na seção de QFT em espaços curvos.

1.9 Síntese: MP é Obrigatoriamente Incompleto

As evidências observacionais são inequívocas:

- $\sim 95\%$ do universo (matéria escura + energia escura) **não é descrito pelo MP**.
- Neutrinos **têm massa**, o que o MP original não previa.
- A **assimetria matéria-antimatéria** requer física além da violação de CP do MP.

Qualquer extensão do MP deve acomodar essas três observações. Essa é a motivação empírica das seções seguintes: supersimetria, GUTs e o SMEFT como arcabouço geral.

2 Supersimetria e o MSSM

Supersimetria (SUSY) é, de longe, a extensão mais estudada do Modelo Padrão. Proposta nos anos 1970 (Wess-Zumino, Volkov-Akulov), ela introduz uma nova simetria fundamental entre férmions e bósons, prevendo que cada partícula conhecida tem um **superparceiro** com spin diferindo por $1/2$. SUSY resolve (ou ameniza) simultaneamente múltiplos problemas teóricos do MP: hierarquia, unificação de acoplamentos, candidato natural a matéria escura, e integração com gravitação via supergravidade. Experimentalmente, porém, nenhum superparceiro foi descoberto até 2024, e os limites do LHC excluem boa parte do espaço de parâmetros mais natural. Essa tensão entre elegância teórica e silêncio experimental é uma das situações mais interessantes da física contemporânea.

2.1 A Álgebra de SUSY

SUSY introduz operadores fermiônicos Q_α (espinores de Weyl) que transformam bósons em férmions e vice-versa:

$$Q_\alpha |\text{bóson}\rangle = |\text{férmion}\rangle, \quad Q_\alpha |\text{férmion}\rangle = |\text{bóson}\rangle.$$

A álgebra fechada é (versão $\mathcal{N} = 1$ em 4D):

$$\boxed{\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2 \sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad [P^\mu, Q_\alpha] = 0.}$$

Implicação crucial. O anticomutador $\{Q, Q^\dagger\}$ produz o operador de momento — isto é, **SUSY é uma extensão do grupo de Poincaré**, unindo simetria interna e espaço-temporal. O teorema de Coleman-Mandula (1967) estabelecia que tal unificação é impossível com álgebras de Lie ordinárias; a saída de Haag-Łopuszański-Sohnius (1975) é usar **álgebras graduadas** ($\mathbb{Z}_2$), admitindo geradores fermiônicos. SUSY é a única generalização não-trivial do grupo de Poincaré compatível com física relativística.

2.2 Supermultipletes

Os estados agrupam-se em **supermultipletes**, com bósons e férmions em igual número:

Multiplete quirál (Wess-Zumino).

$$(\phi, \psi, F) : \quad \phi = \text{escalar complexo}, \quad \psi = \text{espinor Weyl}, \quad F = \text{auxiliar}.$$

Degraus físicos: 2 reais (escalar) + 2 (espinor) = 4 graus. F é eliminado por sua equação algébrica de movimento.

Multiplete vetorial (de gauge).

$$(A_\mu, \lambda, D) : \quad A_\mu = \text{bóson vetorial}, \quad \lambda = \text{gaugino (espinor)}, \quad D = \text{auxiliar}.$$

Degraus: 2 (transversais A_μ) + 2 (gaugino).

Multiplete gravitacional (supergravidade).

$$(g_{\mu\nu}, \psi_{\mu\alpha}) : \quad g_{\mu\nu} = \text{gráviton (spin 2)}, \quad \psi_\mu = \text{gravitino (spin 3/2)}.$$

2.3 O MSSM (Minimal Supersymmetric Standard Model)

O MSSM é a realização mais econômica de SUSY compatível com o MP:

- Cada férmion do MP $\rightarrow$ dois escalares (*sfermions*): $\tilde{u}_L, \tilde{u}_R, \tilde{d}_L, \tilde{d}_R, \tilde{e}_L, \tilde{e}_R, \tilde{\nu}_L$, para cada geração.
- Cada bóson de gauge $\rightarrow$ um *gaugino*: $\tilde{g}$ (gluino), $\tilde{W}^{1,2,3}$ (winos), $\tilde{B}$ (bino).
- **Dois** dubletos de Higgs (H_u e H_d), cada um com seu *higgsino* $\tilde{H}_u, \tilde{H}_d$.

Por que dois Higgs? Três razões:

1. Cancelamento de anomalia: o higgsino é um férmion com hipercarga $\pm 1/2$; a anomalia só cancela em pares.
2. Gerar massas: H_u dá massa a quarks tipo-up, H_d a quarks tipo-down e léptons.
3. Em SUSY, o superpotencial deve ser **holomórfico** (função apenas dos supercampos, não de seus conjugados). Isso proíbe o uso de $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$ como em MP.

Espectro físico. Após QES:

- 5 bósons de Higgs físicos: h^0 (leve, $\sim$ MP), H^0, A^0 (pseudoscalar), $H^\pm$.
- 4 *neutralinos* $\chi_1^0, \dots, \chi_4^0$ (misturas de $\tilde{B}, \tilde{W}^0, \tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0$).
- 2 *charginos* $\chi_{1,2}^\pm$ (misturas de $\tilde{W}^\pm, \tilde{H}^\pm$).

- *Sfermions* $\tilde{q}, \tilde{\ell}, \tilde{\nu}$ (em estados $\tilde{f}_{L,R}$ misturados para top/bottom/tau).
- 1 *gluino* $\tilde{g}$.

2.4 Paridade R e Estabilidade do Próton

O superpotencial mais geral permite termos que violam B e L :

$$W_{\mathcal{R}} = \lambda_{ijk} L_i L_j e_k^c + \lambda'_{ijk} L_i Q_j d_k^c + \lambda''_{ijk} u_i^c d_j^c d_k^c,$$

que gerariam decaimento rápido do próton: $p \rightarrow e^+ \pi^0$ em tempo $\tau \sim 10^{-9}$ s — contradizendo $\tau_p > 10^{34}$ anos. Solução: introduzir uma **paridade discreta** R :

$$R = (-1)^{3(B-L)+2s}.$$

Partículas do MP têm $R = +1$; superparceiros têm $R = -1$. Impondo R -paridade:

1. Superparceiros são produzidos em pares.
2. O **mais leve superparceiro (LSP)** é estável.
3. Próton é estável.

Se o LSP é neutro e fracamente interagente (tipicamente o neutralino mais leve χ_1^0), é **candidato natural a matéria escura** — o WIMP paradigmático.

2.5 Solução do Problema da Hierarquia

O problema da hierarquia (Higgs) no MP: correções radiativas à massa do Higgs são quadraticamente divergentes,

$$\delta m_H^2 \sim \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \Lambda_{UV}^2.$$

Com $\Lambda_{UV} \sim M_P \sim 10^{19}$ GeV, $\delta m_H^2 \sim 10^{36}$ GeV², comparado com $m_H^2 \sim (125 \text{ GeV})^2 \sim 10^4$ GeV². Ajuste fino de $\sim 10^{32}$ — não-natural.

SUSY resolve. Para cada loop bosônico, há um loop fermiônico correspondente (superparceiro) com sinal oposto:

$$\delta m_H^2|_{\text{bóson}} + \delta m_H^2|_{\text{férmion}} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} (m_B^2 - m_F^2) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}.$$

Se SUSY fosse exata, $m_B = m_F$ e a correção se cancelaria completamente. Com quebra suave, sobra $\delta m_H^2 \sim m_{\text{SUSY}}^2 - m_{\text{MP}}^2$, aceitável se $m_{\text{SUSY}} \lesssim \text{TeV}$.

Previsão robusta. Superparceiros com massa $\lesssim$ poucos TeV. *Se não forem descobertos nessa escala, a naturalidade de SUSY é comprometida.*

2.6 Unificação de Acoplamentos

No MP puro, rodando os três acoplamentos de gauge g_1, g_2, g_3 via grupo de renormalização a M_{GUT} , eles quase se encontram, mas **não exatamente**. Com o MSSM, incluindo os superparceiros, os coeficientes das β -funções mudam:

$$b_1^{\text{MSSM}} = 33/5, \quad b_2^{\text{MSSM}} = 1, \quad b_3^{\text{MSSM}} = -3,$$

vs. MP: $41/10, -19/6, -7$. O resultado é **unificação precisa** em:

$$M_{\text{GUT}}^{\text{MSSM}} \approx 2 \times 10^{16} \text{ GeV}, \quad \alpha_{\text{GUT}} \approx 1/25.$$

Essa é uma das evidências mais fortes — embora indiretas — em favor de SUSY + GUT.

2.7 Mecanismos de Quebra de SUSY

SUSY deve ser quebrada (não vemos superparceiros degenerados). A quebra é tipicamente dividida em dois setores:

- **Setor oculto:** quebra SUSY espontaneamente (F-termos ou D-termos não nulos).
- **Setor visível (MSSM):** recebe a quebra via um **mediador**.

Os principais mecanismos:

Gravity mediation (mSUGRA/CMSSM). Quebra comunicada via gravitação. Parâmetros universais em M_{GUT} : $m_0, m_{1/2}, A_0, \tan \beta, \text{sign}(\mu)$. Cinco parâmetros controlam todo o espectro.

Gauge mediation (GMSB). Mensageiros carregados sob $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ comunicam a quebra. Prevê massas proporcionais a acoplamentos de gauge e **gravitino muito leve**.

Anomaly mediation (AMSB). Quebra via anomalia conforme. Prevê massas proporcionais a β -funções. Wino ou *sneutrino* como LSP.

2.8 Fenomenologia e Estado Experimental

Assinaturas no LHC. Produção em pares ($\tilde{q}\tilde{q}$, $\tilde{g}\tilde{g}$) via QCD; cascatas de decaimento terminando em LSP estável que escapa $\rightarrow$ **missing transverse energy** (E_T^{miss}):

$$pp \rightarrow \tilde{q}\tilde{q} \rightarrow (q\chi_2^0)(q\chi_2^0) \rightarrow (q\ell^+\ell^-\chi_1^0)(q\ell^+\ell^-\chi_1^0).$$

Assinatura: jatos + léptons + E_T^{miss} .

Limites atuais (ATLAS/CMS, 2024):

$$m_{\tilde{g}} > 2.3 \text{ TeV}, \quad m_{\tilde{q}} > 1.8 \text{ TeV}, \quad m_{\tilde{t}_1} > 1.25 \text{ TeV},$$

$$m_{\chi_1^0} > 200 \text{ GeV (dependendo do modelo)}.$$

Esses limites excluem a região mais natural ($m_{\text{SUSY}} \lesssim \text{TeV}$).

Massa do Higgs em 125 GeV. O MSSM prevê $m_h \leq m_Z$ em nível árvore! A medida $m_h = 125 \text{ GeV}$ requer grande correção radiativa, exigindo **stops pesados** ($m_{\tilde{t}} \gtrsim \text{TeV}$), aumentando a tensão de naturalidade.

2.9 Crise de Naturalidade?

O "*little hierarchy problem*": a não-observação de SUSY na escala de $\sim 100\text{--}500 \text{ GeV}$ (escala natural para cancelar a hierarquia) levanta dúvidas sobre o paradigma. Respostas:

1. SUSY ainda está lá, apenas em escala ligeiramente maior ($\sim 2\text{--}5 \text{ TeV}$). Próxima fase do LHC (HL-LHC) ou colisor futuro pode encontrá-la.
2. SUSY mais elaborada: *split SUSY* (sfermions pesados, gauginos leves), *stealth SUSY* (assinaturas escondidas), RPV-SUSY (sem LSP estável).
3. Solução alternativa ao problema da hierarquia: *composite Higgs*, dimensões extras (Randall-Sundrum), *relaxion*, antropia/multiverso.
4. SUSY em escala Planck (super cordas) sem expectativa de solução da hierarquia em TeV.

2.10 Supergravidade (SUGRA)

Ao promover SUSY de global para **local**, o parâmetro $\theta(x)$ dependente de ponto exige um campo de gauge associado — o **gravitino** ψ_μ (spin 3/2). A álgebra fecha apenas se incluirmos gravitação: **SUGRA é a teoria quântica de gravitação mais natural** no contexto supersimétrico.

Em SUGRA $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$, a ação inclui $g_{\mu\nu}, \psi_\mu$ acoplados a matéria MSSM. A quebra de SUSY gera massa ao gravitino via **super-Higgs**:

$$m_{3/2} \sim \frac{F}{M_P},$$

com F escala de quebra. Dependendo do mediador, $m_{3/2}$ varia de $\sim \text{eV}$ (GMSB) a $\sim \text{TeV}$ (gravity mediation). Em certos cenários, o gravitino é o LSP e matéria escura.

2.11 Síntese

SUSY é uma construção teórica de enorme elegância e poder preditivo. Resolve:

- Problema da hierarquia (se $m_{\text{SUSY}} \lesssim \text{TeV}$).
- Unificação de acoplamentos.
- Candidato natural a matéria escura (LSP).
- Caminho natural para supergravidade e cordas.

Mas a ausência de evidência direta no LHC após duas décadas de buscas cria uma tensão crescente entre expectativa teórica e realidade experimental. A próxima geração de experimentos (HL-LHC, FCC-ee/hh, muon collider) definirá se SUSY é a direção correta da física além do MP, ou se precisamos de ideias genuinamente novas.

3 Grandes Teorias Unificadas (GUTs)

O Modelo Padrão tem estrutura de gauge peculiar: um produto direto de três grupos distintos, $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, com três constantes de acoplamento independentes. Por que a natureza escolheria essa estrutura fragmentada? Grandes Teorias Unificadas (GUTs) propõem que, em alta energia, os três grupos se **unificam** em um grupo simples G_{GUT} com uma única constante de acoplamento. Abaixo de uma escala $M_{\text{GUT}} \sim 10^{15}\text{--}10^{16}$ GeV, G_{GUT} se quebra espontaneamente em $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, recuperando o MP. Essa é uma das ideias mais profundas da física de partículas do século XX, com consequências observacionais específicas.

3.1 Motivação: Unificação de Acoplamentos

Como discutido na seção de SUSY, rodar g_1, g_2, g_3 com o grupo de renormalização mostra que eles se aproximam em escalas altíssimas. No MSSM, a convergência é quase perfeita em $M_{\text{GUT}} \approx 2 \times 10^{16}$ GeV. Essa é a motivação fenomenológica mais forte para GUTs: **os três acoplamentos parecem encontrar-se em um único ponto**.

Adicionalmente, GUTs potencialmente explicam:

- Quantização da carga elétrica ($Q_p = |Q_e|$ com precisão absoluta).
- Relações entre massas de quarks e léptons.
- Cancelamento automático de anomalias.
- Origem das três gerações (em alguns modelos).

3.2 $SU(5)$: A GUT Mais Simples (Georgi-Glashow 1974)

O grupo $SU(5)$ tem 24 geradores — exatamente 12 do MP ($8 + 3 + 1$) mais 12 novos. A representação fundamental **5** de $SU(5)$ contém, para cada geração:

$$\bar{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} d_R^c \\ d_G^c \\ d_B^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L, \quad \mathbf{10} = \begin{pmatrix} 0 & u_B^c & -u_G^c & u_R & d_R \\ & 0 & u_R^c & u_G & d_G \\ & & 0 & u_B & d_B \\ & & & 0 & e^+ \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_L.$$

Juntos, $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$ comporta **exatamente os 15 férmions por geração** do MP. Notável coincidência: o MP se encaixa perfeitamente em representações de $SU(5)$.

Quebra $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Via Higgs adjunto $\Sigma \in \mathbf{24}$ desenvolvendo VEV:

$$\langle \Sigma \rangle = V \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3),$$

com $V \sim M_{\text{GUT}}$. Os 12 bósons de gauge pesados — X, Y com massas $\sim M_{\text{GUT}}$ — mediam novas interações que violam B e L .

Quantização de carga. Em $\bar{\mathbf{5}}$, o traço deve ser zero:

$$3Q(d^c) + Q(e^-) + Q(\nu) = 0 \implies 3Q(d^c) - 1 = 0 \implies Q(d) = -1/3.$$

Carga do quark d é **previsão** de $SU(5)$, não input. A carga elétrica é **quantizada**: múltiplo inteiro de $1/3$.

Dcaimento do próton. Os bósons X, Y medeiam $qq \rightarrow q\bar{\ell}$, resultando em:

$$p \rightarrow e^+ \pi^0, \quad \tau_p \sim \frac{M_X^4}{m_p^5 \alpha_{\text{GUT}}^2}.$$

Predição numérica para $SU(5)$ mínimo:

$$\tau_p \sim 10^{28} - 10^{30} \text{ anos.}$$

Isso é excluído experimentalmente: limite atual de Super-Kamiokande $\tau_p(p \rightarrow e^+ \pi^0) > 2.4 \times 10^{34}$ anos. $SU(5)$ mínimo (não-SUSY) **está descartado**.

3.3 $SU(5)$ SUSY

Com MSSM rodando acima de ~ 1 TeV, M_{GUT} aumenta para $\sim 2 \times 10^{16}$ GeV, e a vida do próton se eleva:

$$\tau_p^{\text{SUSY}} \sim 10^{34} - 10^{36} \text{ anos.}$$

Na fronteira da exclusão. Futuros experimentos (Hyper-K, DUNE) testarão decisivamente. Em SUSY-GUTs, o canal dominante é frequentemente $p \rightarrow \nu K^+$ (via novo diagrama com squarks), não $e^+ \pi^0$.

3.4 $SO(10)$: Elegância Ainda Maior

O grupo $SO(10)$ (Fritzsch-Minkowski, Georgi 1975) tem **uma única representação spinorial 16** que contém, para cada geração:

$$\mathbf{16} \supset \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{1}.$$

Isto é: $SU(5)$ de $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$ mais **um singlete adicional**. Esse singlete é precisamente um **neutrino destrógiro** ν_R . Em $SO(10)$:

- ν_R aparece automaticamente.
- Mecanismo seesaw é **natural**: $M_R \sim M_{\text{GUT}} \sim 10^{15}$ GeV produz $m_\nu \sim 0.01$ eV exatamente como observado.
- Cada geração está em uma **única representação irredutível**.
- Cancelamento de anomalia é **automático**: $SO(10)$ não tem anomalias de gauge.

Essa elegância tornou $SO(10)$ favorecido como GUT "natural".

Caminhos de quebra. $SO(10)$ permite múltiplas rotas:

$$SO(10) \rightarrow SU(5) \times U(1) \rightarrow \text{MP},$$

$$SO(10) \rightarrow SU(4)_{\text{PS}} \times SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow \text{MP} \quad (\text{Pati-Salam}),$$

$$SO(10) \rightarrow SU(3) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \rightarrow \text{MP}.$$

Diferentes esquemas preveem diferentes fenomenologias em escalas intermediárias.

3.5 Pati-Salam ($SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$)

Proposto antes de $SO(10)$ (Pati-Salam 1974), unifica apenas parcialmente:

- Cor $SU(3)$ é estendida a $SU(4)$, com **léptons como quarta cor**.
- Simetria esquerda-direita $SU(2)_R$ adicional, unificada com $SU(2)_L$ em alta escala.
- $B - L$ é gauge simetria.

Prevê:

$$p \rightarrow e^+ \pi^0 \text{ (muito suprimido), } \text{ bósons } W_R^\pm \text{ e } Z',$$

estes possivelmente acessíveis em colisores futuros se $M_R \sim 10$ TeV.

3.6 E_6 e Unificações Maiores

E_6 (grupo excepcional) contém $SO(10)$ e aparece naturalmente em compactificações de cordas heteróticas. A representação fundamental **27** contém **16** de $SO(10)$ mais estados adicionais. Previsões de E_6 :

- Novos quarks exóticos e léptons.
- Múltiplos Z' bósons.
- Estrutura ramificada rica.

3.7 Predições Observacionais de GUTs

As GUTs preveem fenômenos específicos, testáveis experimentalmente:

Decaimento do próton. Assinatura distintiva. Canais principais:

$$p \rightarrow e^+ \pi^0, \quad p \rightarrow \bar{\nu} K^+, \quad p \rightarrow \mu^+ K^0, \dots$$

Experimentos: Super-Kamiokande (atual), Hyper-K (em construção), DUNE (em construção). Sensibilidade projetada $\tau_p > 10^{35}$ anos.

Monopolos magnéticos. Toda GUT prevê monopolos com massa $\sim M_{\text{GUT}}/\alpha \sim 10^{17}$ GeV. Sua abundância cosmológica presente seria catastroficamente alta (*monopole problem*) — uma das motivações originais da inflação cósmica, que os dilui exponencialmente.

Relações de massa.

$$\text{em } SU(5) : \quad m_b(M_{\text{GUT}}) = m_\tau(M_{\text{GUT}}),$$

$$\text{em } SO(10) : \quad m_t(M_{\text{GUT}}) = m_{\nu_D}(M_{\text{GUT}}).$$

Após running ao regime de baixa energia, essas relações preveem $m_b/m_\tau \approx 2.8$ no IR — **em excelente acordo com observação.**

Leptogênese. Natural em $SO(10)$ via decaimento de N_R pesados. Conecta GUT, massa de neutrinos e assimetria bariônica em um único quadro.

Ondas gravitacionais primordiais. Transições de fase associadas a quebras de GUT podem gerar fundos de ondas gravitacionais cosmológicas, acessíveis a LISA, ET e observatórios futuros.

3.8 Problemas das GUTs

Problema da hierarquia doublet-triplet. O Higgs **5** de $SU(5)$ contém o dubleto do MP (deve ser leve, $\sim \text{TeV}$) e um tripleto colorido (deve ser pesado $\sim M_{\text{GUT}}$ para suprimir decaimento do próton). Explicar essa hierarquia interna requer mecanismos especiais (missing partner, dimopoulos-wilczek).

Sabor. GUTs minimais preveem relações de massa em M_{GUT} que, após running, não reproduzem todos os dados (ex.: $m_d/m_s \neq m_e/m_\mu$ em $SU(5)$). Requer estrutura de sabor mais elaborada (Georgi-Jarlskog, texturas).

Ausência de sinais. Decaimento do próton não observado; monopolos não detectados. GUTs mais simples estão sob tensão crescente.

3.9 Síntese

GUTs representam talvez a generalização mais elegante e ambiciosa do Modelo Padrão:

- Reduzem $3 \rightarrow 1$ constantes de acoplamento.
- Explicam quantização de carga.
- Incorporam naturalmente massa de neutrinos (via seesaw em $SO(10)$).
- Unificam em representações únicas por geração.
- Conectam com inflação (diluição de monopolos) e cosmologia (leptogênese).

Experimentalmente, decaimento de próton é a janela definitiva. Teoricamente, GUTs alimentam e são alimentadas por SUSY e por teoria de cordas (grupos de gauge excepcionais em compactificações). Essa constelação de ideias — SUSY + GUT + cordas — é o paradigma unificador dominante da física teórica de partículas dos últimos 40 anos, apesar da ausência persistente de confirmação direta.

4 SMEFT: O Modelo Padrão Como Teoria Efetiva

Dado que o Modelo Padrão é comprovadamente incompleto (matéria escura, neutrinos massivos, assimetria bariônica, gravitação), e que a nova física correspondente ainda não foi identificada, **qual a linguagem apropriada para parametrizar desvios do MP de forma sistemática e independente do modelo UV subjacente?** A resposta moderna é o **Standard Model Effective Field Theory (SMEFT)** — uma teoria efetiva que trata o MP como a limite de baixa energia de alguma teoria UV desconhecida, adicionando todos os operadores não-renormalizáveis compatíveis com as simetrias do MP.

Essa é a abordagem dominante desde meados dos anos 2010 para interpretar dados de precisão do LHC, física de sabor, momento magnético do múon, e praticamente qualquer observação que *não* seja descoberta direta de novas partículas. É o arcabouço teórico mais ativo da física de partículas fenomenológica atual.

4.1 A Filosofia da EFT

A ideia de teoria efetiva é antiga e pervasiva:

- **QED**: teoria efetiva em baixa energia da teoria eletrofraca (após integrar $W, Z \rightarrow$ operadores de Fermi).
- **Teoria de Fermi do β -decay**: teoria efetiva com operador de dimensão-6 $G_F(\bar{\psi}\psi)^2$ — válida em $E \ll M_W$.
- **ChPT**: teoria efetiva de QCD em baixa energia.
- **HQET, SCET**: EFTs para quarks pesados e processos collineares.

O SMEFT aplica a mesma lógica *em direção oposta*: assumindo que o MP é válido até alguma escala Λ , parametrizamos os efeitos de nova física em $E < \Lambda$ por operadores locais de dimensão > 4 :

$$\mathcal{L}_{\text{SMEFT}} = \mathcal{L}_{\text{MP}} + \sum_{d>4} \sum_i \frac{C_i^{(d)}}{\Lambda^{d-4}} \mathcal{O}_i^{(d)}.$$

Os **coeficientes de Wilson** $C_i^{(d)}$ são números adimensionais que codificam informação da teoria UV integrada.

Vantagens da abordagem.

1. **Agnóstica:** não assume modelo UV específico. Útil quando não sabemos qual é a nova física.
2. **Sistemática:** expansão em $1/\Lambda$ organizada; ordem n suprimida por $(E/\Lambda)^n$.
3. **Invariante de gauge:** operadores respeitam $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.
4. **Renormalizável ordem-a-ordem:** em cada dimensão d , há número finito de operadores; contratermos controlados.
5. **Facilita combinação de dados:** limites vêm simultaneamente de todos os experimentos, reduzindo-se a vínculos nos C_i .

4.2 Operador de Dimensão-5: Massa de Majorana

Existe **exatamente um** operador de dimensão 5 invariante de gauge:

$$\mathcal{O}_{\text{Weinberg}}^{(5)} = (L^T i\sigma_2 H) C (H^T i\sigma_2 L),$$

o **operador de Weinberg** (1979), já discutido na seção de neutrinos. Após QES:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{C_{ij}}{\Lambda} v^2 \nu_L^i C \nu_L^j + \text{h.c.},$$

gerando massa de Majorana $m_\nu = Cv^2/\Lambda$. Com $m_\nu \sim 0.05$ eV e $v = 246$ GeV: $\Lambda \sim 10^{14}$ GeV (para $C \sim 1$).

Significado: este é o *único* sinal **confirmado** de operador EFT em ação — os neutrinos pesam porque este operador existe. Qualquer teoria UV completa deve reduzir-se ao operador de Weinberg em baixa energia.

4.3 Operadores de Dimensão-6: A Base de Warsaw

Em dimensão 6, há muitos operadores. A **base de Warsaw** (Grzadkowski et al. 2010) fornece um conjunto completo, não-redundante, composto de **59 operadores independentes** (ignorando índices de sabor). Com índices de sabor, contando adequadamente hermiticidade: **2499 parâmetros** para três gerações.

Classificação. Os 59 operadores dim-6 dividem-se em classes:

Classe	Estrutura típica	Número
X^3 (puramente bósons de gauge)	$f^{abc} G_\nu^a G_\rho^b G_\mu^c$	4
φ^6 (puramente Higgs)	$(H^\dagger H)^3$	1
$\varphi^4 D^2$ (Higgs + derivadas)	$(H^\dagger H) \square (H^\dagger H)$	2
$X^2 \varphi^2$ (gauge + Higgs)	$H^\dagger H G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$	8
$\psi^2 \varphi^3$ (Yukawa-like)	$(H^\dagger H) \bar{L} H e_R$	3
$\psi^2 X \varphi$ (dipolo)	$\bar{L} \sigma^{\mu\nu} e_R H F_{\mu\nu}$	8
$\psi^2 \varphi^2 D$ (corrente-Higgs)	$(H^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu H) (\bar{L} \gamma^\mu L)$	8
ψ^4 (quatro-fermion)	$(\bar{L} \gamma^\mu L) (\bar{L} \gamma_\mu L)$ etc.	25

Exemplos importantes.

$$\mathcal{O}_{HG} = H^\dagger H G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (\text{modifica acoplamento } H \rightarrow gg),$$

$$\mathcal{O}_{H\square} = (H^\dagger H) \square (H^\dagger H) \quad (\text{modifica cinemática do Higgs}),$$

$$\mathcal{O}_{eH} = (H^\dagger H) (\bar{L} H e_R) \quad (\text{corrige acoplamento de Yukawa}),$$

$$\mathcal{O}_W = \epsilon^{abc} W_\mu^a W_\nu^b W_\rho^c \quad (\text{triplo-gauge anômalo}),$$

$$\mathcal{O}_{ll} = (\bar{L} \gamma^\mu L) (\bar{L} \gamma_\mu L) \quad (\text{contato 4-léptons}).$$

4.4 Matching: Ligação com a Teoria UV

Dado um modelo UV específico (SUSY, 2HDM, Z' , léptons pesados, etc.), calcula-se os **coeficientes de Wilson** C_i via *matching* em $\mu = \Lambda$:

1. Integrar os estados pesados (com massa $\sim \Lambda$) do modelo UV.
2. Identificar os operadores efetivos gerados em árvore + loops.
3. Ler os $C_i^{(d)}$ resultantes.

Exemplo: um Z' com massa $M_{Z'}$ e acoplamento g' gera, após integrar:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \supset -\frac{g'^2}{M_{Z'}^2} (\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{C_i}{\Lambda^2} = \frac{g'^2}{M_{Z'}^2}.$$

Esse mapeamento é o que permite *interpretar* medidas de operadores SMEFT em termos de modelos UV específicos.

4.5 Running dos Coeficientes de Wilson

Os $C_i(\mu)$ dependem da escala via equações do grupo de renormalização:

$$\mu \frac{dC_i}{d\mu} = \gamma_{ij} C_j,$$

com matriz de dimensões anômalas γ_{ij} computada a 1-loop e (para muitos operadores) a 2-loops. Essa é uma das contribuições técnicas mais importantes da última década em SMEFT: as matrizes γ_{ij} da base de Warsaw foram calculadas completamente (Alonso, Jenkins, Manohar, Trott 2013-14).

Running importa porque **mistura operadores**: um operador gerado inicialmente em Λ produz contribuições a outros operadores em $\mu \ll \Lambda$. Por exemplo, operadores 4-fermion em Λ contribuem a operadores dipolares em baixa escala — alimentando, por exemplo, $g - 2$ do múon.

4.6 Aplicações Fenomenológicas

Precisão eletrofraca estendida. Os parâmetros de Peskin-Takeuchi S, T, U são casos particulares de coeficientes SMEFT. A abordagem moderna é fitar **todos** os operadores simultaneamente, tratando S, T, U como subset.

Acoplamentos do Higgs. Medidas do LHC ($\gamma\gamma, ZZ, WW, b\bar{b}, \tau^+\tau^-$) são interpretadas em termos de operadores como $\mathcal{O}_{HG}, \mathcal{O}_{HW}, \mathcal{O}_{H\Box}$, buscando desvios padrão. Até 2024, desvios compatíveis com zero com incerteza $\sim 5\text{--}10\%$.

Acoplamentos triple-gauge. Medidas de $pp \rightarrow WW, WZ$ em cinemática diferencial sondam $\mathcal{O}_W, \mathcal{O}_{WB}$.

Física de sabor. $b \rightarrow s\ell\ell, K \rightarrow \pi\nu\nu$, decaimentos raros B são interpretados via operadores $\psi^2\varphi^2 D$ e ψ^4 com estrutura de sabor. Anomalias R_K, R_{K^*} (tensão LHCb, parcialmente resolvida em 2022) são naturalmente descritas em SMEFT.

Momento magnético do múon $(g - 2)_\mu$. A discrepância de $\sim 4\sigma$ entre experimento (Fermilab 2021/2023) e teoria pode ser parametrizada por $\mathcal{O}_{eB}, \mathcal{O}_{eW}$ (operadores dipolares), limitando $\Lambda \lesssim$ alguns TeV se o coeficiente for ordem unidade.

Massa do W . A medida de CDF (2022), $m_W = 80.4335 \pm 0.0094$ GeV, $\sim 7\sigma$ acima do MP, gerou intensa atividade em SMEFT. Reconciliações requerem operadores específicos tipo $\mathcal{O}_{HWB}, \mathcal{O}_{HD}$.

EDMs e violação de CP. Limites experimentais em momentos de dipolo elétrico (elétron, nêutron) restringem drasticamente fases de CP dos coeficientes de Wilson, indicando fortemente que nova física na escala TeV tem estrutura de sabor e CP quase alinhada ao MP.

4.7 Limites Representativos (Ordens de Magnitude)

Os dados experimentais atuais estabelecem escalas típicas para nova física:

Classe de operador	Limite em Λ (se $C_i \sim 1$)
Operadores Higgs bosônicos	$\Lambda \gtrsim 1\text{--}2$ TeV
Corrente-Higgs $\psi^2 \varphi^2 D$	$\Lambda \gtrsim 5\text{--}10$ TeV
4-lépton contacts	$\Lambda \gtrsim 10\text{--}20$ TeV
4-quark (sabor-conservante)	$\Lambda \gtrsim 5\text{--}10$ TeV
$\Delta F = 2$ (sabor, B_s mixing)	$\Lambda \gtrsim 10^3$ TeV
$\Delta F = 2$ (kaons, CP-violação)	$\Lambda \gtrsim 10^5$ TeV
EDM do elétron	$\Lambda \gtrsim 10^4$ TeV (fase CP)

Esses limites ilustram o **problema de sabor**: nova física genérica em $\sim$ TeV contradiria violação de sabor/CP observada. Modelos UV devem ter estruturas específicas (MFV — *minimal flavor violation*) para escapar.

4.8 HEFT: Alternativa Não-Linear

Para o caso particular do setor de Higgs, existe uma alternativa ao SMEFT: o **Higgs Effective Field Theory (HEFT)**. Trata o Higgs como escalar genérico, **não** necessariamente como componente de dubleto $SU(2)$. HEFT é adequado para modelos de *composite Higgs* onde o Higgs é pseudo-Goldstone de simetria maior.

A diferença prática: em HEFT, certos observáveis (como acoplamento $VVHH$) são independentes de VVH , enquanto em SMEFT são correlacionados. Medidas futuras do *double-Higgs* ($pp \rightarrow HH$) no HL-LHC discriminarão entre os dois arcabouços.

4.9 Direções Futuras

Ordem $1/\Lambda^4$ (dim-8). Cada vez mais relevante à medida que precisão aumenta. Operadores dim-8 são **2557** (base completa construída 2020-2021). Dominantes em processos de alto p_T e direções cinemáticas específicas.

SMEFT global fits. Colaborações como SMEFiT, fitmaker, EFTfitter realizam ajustes globais simultâneos de dezenas de coeficientes usando milhares de pontos experimentais. Gerarão mapas de tensões e limites cada vez mais refinados.

Conexões com UV. Catalogação sistemática: "se medirmos C_i e C_j não-nulos mas $C_k = 0$, quais modelos UV são compatíveis?" Mapas $SMEFT \leftrightarrow \text{modelos UV}$ estão sendo construídos sistematicamente.

SMEFT + cosmologia + gravitação. Extensões incluem gravidade ($R^2, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, etc. — ver seção de QFT em espaços curvos) e conexões com inflação (Higgs inflation requer termo $\xi H^\dagger H R$ que é dim-4, mas correções dim-6 já modificam preditividade).

4.10 Síntese

O SMEFT representa a **linguagem moderna e unificadora** para física além do Modelo Padrão:

- Framework agnóstico: não pressupõe modelo UV.
- Sistemático: expansão ordenada em $1/\Lambda$.
- Já opera: operador de Weinberg (dim-5) explica massa dos neutrinos.
- Parametriza praticamente todas as medidas de precisão do LHC e experimentos de sabor.
- Fornece pontes diretas entre teoria (modelos UV) e experimento (observáveis).

Embora o SMEFT *não faça previsões* por si só (precisa de input experimental para fixar os C_i), é a ferramenta mais versátil para traduzir observações em vínculos sobre nova física. Seu desenvolvimento contínuo (bases de ordem mais alta, running a 2-loops, fits globais) é uma das atividades mais intensas da física fenomenológica atual.

Em certo sentido, todo o programa de física de precisão do LHC e colisores futuros é, implicitamente, um teste do SMEFT. Descobrir um coeficiente

$C_i \neq 0$ em dim-6 seria **equivalente a descobrir nova física** — talvez o caminho mais provável para a próxima grande revelação em física de partículas.

Parte X

Quantização Canônica dos Campos

Esta parte apresenta, de forma complementar ao tratamento via integral de caminho desenvolvido nas partes anteriores, a **quantização canônica** sistemática de todos os campos do Modelo Padrão, bem como extensões para o setor gravitacional (gravitino e gráviton). A abordagem canônica oferece uma perspectiva Hamiltoniana direta, expondo explicitamente o conteúdo espectral (operadores de criação/aniquilação, estados de Fock) e os vínculos primários das teorias de gauge. Os tópicos abordados são:

- **Fundamentos Axiomáticos:** Estrutura simplética, parênteses de Poisson-Dirac e o teorema Spin-Estatística.
- **Campos Escalares:** Real, complexo e o dubleto de Higgs sob $SU(2)_L \times U(1)_Y$.
- **Campos Espinoriais de Dirac:** Equação de Dirac, expansão em u, v , estrutura quiral do MP.
- **Campos Vetoriais Massivos (Proca):** Z^0 e $W^\pm$, vínculos primários.
- **Campos de Calibre sem Massa:** Fótons (Gupta-Bleuler) e glúons.
- **Fantasma de Faddeev-Popov:** Escalares anticomutantes em gauges covariantes.
- **Extensões Gravitacionais:** Gravitino (spin 3/2) e gráviton (spin 2).

1 Introdução Axiomática

A quantização canônica de uma teoria de campos clássica fundamenta-se na formulação Hamiltoniana e no formalismo simplético. Dada uma variedade funcional no espaço de

fase, a estrutura simplética é definida pela 2-forma

$$\Omega = \int d^3x \delta\pi_a(x) \wedge \delta\phi^a(x),$$

onde ϕ^a são os campos fundamentais e $\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^a}$ são os momentos conjugados.

A transição clássico-quântico postula a elevação dos observáveis clássicos a operadores lineares atuando em um Espaço de Fock, substituindo os parênteses de Poisson-Dirac pelas relações de comutação de tempo igual (ETCR) ou anticomutação (ETAR):

$$\{\phi^a(t, \vec{x}), \pi_b(t, \vec{y})\}_{PB} \longrightarrow [\phi^a(t, \vec{x}), \pi_b(t, \vec{y})]_{\pm} = i \delta_b^a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

onde o comutador $[A, B]_- = AB - BA$ é reservado para campos bosônicos (spin inteiro), e o anticomutador $[A, B]_+ = \{A, B\} = AB + BA$ para campos fermiônicos (spin semi-inteiro), em estrita obediência ao **Teorema Spin-Estatística** (Pauli-Lüders). A violação desta regra fundamental para campos físicos introduziria estados de energia ilimitada inferiormente ou probabilidades negativas. A métrica adotada é $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

2 Campos Escalares e a Equação de Klein-Gordon

2.1 Campo Escalar Real Neutro

A densidade Lagrangiana para o campo escalar real $\phi(x)$ de massa m é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange, obtemos a Equação de Klein-Gordon:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \implies (\square + m^2) \phi(x) = 0,$$

onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$. O momento conjugado é calculado passo a passo:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x) = \partial_0 \phi(x).$$

A expansão de Fourier completa do campo como operador é:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right),$$

onde $p \cdot x = E_{\vec{p}}t - \vec{p} \cdot \vec{x}$ e $E_{\vec{p}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. O momento conjugado correspondente expande-se como:

$$\pi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (-iE_{\vec{p}}) \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right).$$

As relações de comutação de tempo igual (ETCR) são:

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0. \end{aligned}$$

Invertendo as expansões de Fourier, obtemos a álgebra canônica dos operadores de criação e aniquilação:

$$\begin{aligned} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] &= [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \end{aligned}$$

2.2 Campo Escalar Complexo Carregado

Para duas espécies de campos escalares com a mesma massa, constrói-se o campo complexo $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi.$$

Equações de movimento: $(\square + m^2)\Phi = 0$ e $(\square + m^2)\Phi^\dagger = 0$. Momentos conjugados:

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi}^\dagger(x), \quad \Pi^\dagger(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^\dagger} = \dot{\Phi}(x).$$

Expansão de Fourier (distinguindo partículas a e antipartículas b):

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right), \\ \Phi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(b_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right). \end{aligned}$$

ETCR não-nulas:

$$[\Phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\Phi^\dagger(t, \vec{x}), \Pi^\dagger(t, \vec{y})] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

resultando em $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = [b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$.

2.3 Dupleto Escalar de Higgs sob $SU(2)_L \times U(1)_Y$

O campo de Higgs do Modelo Padrão é um dupleto complexo:

$$H(x) = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1(x) + i\phi_2(x) \\ \phi_3(x) + i\phi_4(x) \end{pmatrix}.$$

A Lagrangiana (antes da quebra espontânea de simetria, na convenção adotada neste documento) é:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) + \mu^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2,$$

onde a derivada covariante é $D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a \tau^a/2 - ig'YB_\mu$. O momento conjugado canônico para o setor escalar é $\Pi_H = \dot{H}^\dagger$ e $\Pi_{H^\dagger} = \dot{H}$. As regras de comutação estendem-se componente a componente para $i, j \in \{1, 2\}$ do espaço de isospin:

$$[H_i(t, \vec{x}), \Pi_{H,j}(t, \vec{y})] = i \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

3 Campos Espinoriais de Dirac e Estrutura Quiral do Modelo Padrão

Os férmions fundamentais obedecem à estatística de Fermi-Dirac e transformam-se na representação $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ do grupo de Lorentz. A Lagrangiana de Dirac:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Equações de Movimento:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad \text{e} \quad i\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) = 0.$$

Cálculo do momento conjugado:

$$\pi_\psi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(x)} = i\bar{\psi}(x)\gamma^0 = i\psi^\dagger(x).$$

Expansão de Fourier em espinores de base $u^s(p)$ e $v^s(p)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1,2} \left(c_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + d_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right), \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1,2} \left(c_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + d_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} \right). \end{aligned}$$

Relações de Anticomutação de Tempo Igual (ETAR):

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \pi_{\psi, \beta}(t, \vec{y})\} = i \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \implies \{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Os operadores de criação e aniquilação anticomutam:

$$\{c_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad \{d_{\vec{p}}^r, d_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}).$$

As relações de completeza sobre spins são $\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m$ e $\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m$, já encontradas anteriormente.

3.1 Estrutura Quiral do Modelo Padrão: $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

Introduzem-se os projetores quirais $P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$ e $P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}$. A expansão de Fourier deve refletir a natureza sem massa destes campos antes do mecanismo de Higgs.

Dubleto Levogiro de Quarks ($SU(3)$ tripleto, $SU(2)$ dubleto):

$$Q_L^{c,i}(x) = \begin{pmatrix} u_L^c(x) \\ d_L^c(x) \end{pmatrix} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \sum_{s=L} \left(c_{\vec{p}}^{s,c,i} u^s(p) e^{-ipx} + d_{\vec{p}}^{s,c,i\dagger} v^s(p) e^{ipx} \right),$$

onde $c \in \{r, g, b\}$ é o índice de cor de $SU(3)$ e $i \in \{1, 2\}$ o índice de isospin.

Singletos Destrógiros de Quarks:

$$u_R^c(x) = P_R u^c(x), \quad d_R^c(x) = P_R d^c(x).$$

Dubleto Levogiro de Léptons (sem cor):

$$L_L^i(x) = \begin{pmatrix} \nu_{e,L}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix}.$$

Singletos Destrógiros Leptônicos: $e_R(x)$.

Os anticomutadores preservam a estrutura de gauge e sabor:

$$\{Q_{L,\alpha}^{c,i}(t, \vec{x}), Q_{L,\beta}^{d,j\dagger}(t, \vec{y})\} = \delta^{cd} \delta^{ij} (P_L)_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

4 Campos Vetoriais Massivos de Proca: Z^0 e $W^\pm$

A aquisição de massa pelo mecanismo de Higgs transforma os campos de calibre fracos originais em bósons vetoriais massivos. A Lagrangiana de Proca real neutro (Z_μ^0):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu,$$

onde $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$. Equações de movimento:

$$\partial_\mu Z^{\mu\nu} + M_Z^2 Z^\nu = 0 \implies \partial_\mu Z^\mu = 0 \text{ e } (\square + M_Z^2)Z^\nu = 0.$$

O momento conjugado para a componente espacial Z_i :

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Z}_i} = Z^{i0} = \dot{Z}^i - \partial^i Z^0 = \dot{Z}_i + \partial_i Z_0.$$

O momento para Z_0 é identicamente nulo, constituindo um **vínculo primário**:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Z}_0} = 0.$$

O campo Z_0 não é dinâmico; é determinado por $\partial_i \pi^i + M_Z^2 Z_0 = 0$. A ETCR incorpora o projetor transversal devido à massa:

$$[Z_i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{y})] = i \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{M_Z^2} \right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Expansão de Fourier em tensores de polarização $\epsilon^\mu(p, \lambda)$ com $\lambda \in \{1, 2, 3\}$ (dois transversos, um longitudinal):

$$Z_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_Z}} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu(p, \lambda) \left(a_{\vec{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right).$$

Álgebra canônica para os graus físicos: $[a_{\vec{p}, \lambda}, a_{\vec{q}, \sigma}^\dagger] = \delta_{\lambda\sigma} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$.

Para o bóson carregado $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu} + M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu.$$

A expansão de Fourier separa a criação de W^+ e W^- :

$$W_\mu^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_W}} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu(p, \lambda) \left(a_{\vec{p}, \lambda}^{(W^-)} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}, \lambda}^{(W^+)\dagger} e^{ip \cdot x} \right).$$

5 Campos de Calibre sem Massa: Fótons e Glúons

5.1 O Campo de Maxwell e o Método Gupta-Bleuler

A Lagrangiana com termo de fixação de calibre covariante (gauge de Feynman, $\xi = 1$):

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \xrightarrow{\xi=1} -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu.$$

Equação de Movimento: $\square A^\mu = 0$. Momento conjugado:

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu.$$

A ETCR covariante é imposta com a métrica de Gupta-Bleuler, evidenciando o espaço de métrica indefinida:

$$[A^\mu(t, \vec{x}), \dot{A}^\nu(t, \vec{y})] = -i \eta^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Expansão de Fourier com 4 polarizações ($\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$):

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\vec{p}|}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu(p, \lambda) \left(a_{\vec{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right).$$

Comutadores dos operadores:

$$[a_{\vec{p}, \lambda}, a_{\vec{q}, \sigma}^\dagger] = -\eta_{\lambda\sigma} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}).$$

O estado fantasma escalar ($\lambda = 0$) possui norma negativa, mitigado pela condição física de Gupta-Bleuler:

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) |\Psi_{\text{fis}}\rangle = 0,$$

onde $A^{\mu(+)}$ é a parte de frequência positiva. Essa condição seleciona o subespaço físico com norma não-negativa.

5.2 Glúons $SU(3)_C$

Os 8 glúons possuem um índice de cor adjunto $a = 1, \dots, 8$:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2,$$

onde $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. No regime livre (assintótico, calibre fixado), a expansão é idêntica à do fóton, mas com índice de cor adicional:

$$[A^{a\mu}(t, \vec{x}), \dot{A}^{b\nu}(t, \vec{y})] = -i \delta^{ab} \eta^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

6 Fantasmas de Faddeev-Popov

Para manter a unitariedade em teorias de gauge não-abelianas covariantes, campos fictícios de Faddeev-Popov são gerados via o determinante de fixação de calibre. A Lagrangiana é:

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = \partial_\mu \bar{c}^a (D^\mu c)^a = \partial_\mu \bar{c}^a (\partial^\mu c^a + g f^{abc} A^{\mu b} c^c).$$

São **escalares anticomutantes**, violando explicitamente o teorema spin-estatística (necessário, pois cancelam graus de liberdade espúrios longitudinais). Equações de movimento para os campos livres: $\square c^a = 0$ e $\square \bar{c}^a = 0$. Momentos conjugados:

$$\pi_c^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{FP}}}{\partial \dot{c}^a} = -\dot{\bar{c}}^a, \quad \pi_{\bar{c}}^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{FP}}}{\partial \dot{\bar{c}}^a} = \dot{c}^a.$$

Relações de Anticomutação:

$$\{c^a(t, \vec{x}), \pi_c^b(t, \vec{y})\} = i \delta^{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \implies \{c^a(t, \vec{x}), \dot{\bar{c}}^b(t, \vec{y})\} = -i \delta^{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Expansão de Fourier:

$$c^a(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\vec{p}|}} \left(\alpha_{\vec{p}}^a e^{-ip \cdot x} + \beta_{\vec{p}}^{a\dagger} e^{ip \cdot x} \right),$$

$$\bar{c}^a(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\vec{p}|}} \left(\beta_{\vec{p}}^a e^{-ip \cdot x} + \alpha_{\vec{p}}^{a\dagger} e^{ip \cdot x} \right).$$

Álgebra: $\{\alpha_{\vec{p}}^a, \alpha_{\vec{q}}^{b\dagger}\} = \delta^{ab} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$.

7 Extensões Gravitacionais e Supergravidade

7.1 Gravitino: Campo de Spin 3/2

Na supergravidade, o parceiro supersimétrico do gráviton é o Gravitino $\psi_\mu(x)$, um espinor-vetor de Majorana. A densidade Lagrangiana (Ação de Rarita-Schwinger sem massa):

$$\mathcal{L}_{\text{RS}} = -\frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \psi_\rho = \bar{\psi}_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \psi_\sigma.$$

Equação de Movimento: $\gamma^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\psi_\rho = 0$. A componente ψ_0 carece de termo derivativo temporal, constituindo um vínculo (multiplicador de Lagrange para o calibre de supersimetria local). Impondo o calibre $\gamma^\mu\psi_\mu = 0$ e $\partial^\mu\psi_\mu = 0$, a equação reduz-se à equação de Dirac $\not{\partial}\psi_\mu = 0$. Momento conjugado físico (com índices vetoriais espaciais i):

$$\pi_\psi^i(x) = i\bar{\psi}^i(x)\gamma^0.$$

O anticomutador canônico físico projetado requer a inserção de um projetor que retira os graus de spin 1/2 e longitudinais:

$$\{\psi_{i,\alpha}(t, \vec{x}), \psi_{j,\beta}^\dagger(t, \vec{y})\} = \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_i\sigma_j\right)_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

A expansão de Fourier acopla espinores com tensores de polarização transversal:

$$\psi_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E}} \sum_{\lambda=\pm 3/2} \left(c_{\vec{p},\lambda} u_\mu(p, \lambda) e^{-ip\cdot x} + c_{\vec{p},\lambda}^\dagger v_\mu(p, \lambda) e^{ip\cdot x} \right).$$

7.2 Gráviton: Campo de Spin 2

As flutuações lineares da métrica plana, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ (onde $\kappa = \sqrt{32\pi G}$), comportam-se como campos tensoriais simétricos de spin 2. A Lagrangiana de Fierz-Pauli (ordem κ^2 da ação de Einstein-Hilbert):

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = \frac{1}{2}\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\rho h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\rho h\partial^\rho h - \partial_\rho h^{\rho\mu}\partial^\nu h_{\mu\nu} + \partial_\rho h^{\rho\mu}\partial_\mu h,$$

onde $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Adotando o calibre harmônico de de Donder, $\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\nu h = 0$, a Lagrangiana simplifica para:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\rho h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\partial_\rho h\partial^\rho h.$$

Equação de Movimento no calibre: $\square h_{\mu\nu} = 0$. O momento conjugado canônico é:

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{\mu\nu}} = \dot{h}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\dot{h}.$$

A ETCR é dada no subespaço transverso-sem-traço (TT), ou, no gauge covariante (que exige fantasmas de spin 1 vetoriais), através de tensores de projeção simétricos:

$$[h_{\mu\nu}(t, \vec{x}), \pi^{\alpha\beta}(t, \vec{y})] = \frac{i}{2} (\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta\delta_\nu^\alpha) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Expansão de Fourier nos dois estados físicos (helicidades $\lambda = \pm 2$):

$$h_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\vec{p}|}} \sum_{\lambda=\pm 2} \epsilon_{\mu\nu}(p, \lambda) \left(a_{\vec{p},\lambda} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p},\lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right),$$

onde o tensor de polarização é transverso ($p^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$), de traço nulo ($\eta^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} = 0$), e obedece

$$[a_{\vec{p},\lambda}, a_{\vec{q},\sigma}^\dagger] = \delta_{\lambda\sigma} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}).$$

8 Síntese Final: Quantização Canônica vs. Integral de Caminho

Encerramos esta parte comparando as duas abordagens complementares de quantização apresentadas neste documento:

Aspecto	Integral de Caminho	Quantização Canônica
Objeto fundamental	Funcional $Z[J]$	Operadores ϕ, π no espaço de Fock
Variável temporal	Trata espaço e tempo em pé de igualdade	Singulariza t (evolução Hamiltoniana)
Simetrias	Manifestamente Lorentz-invariante	Lorentz-invariância emerge indiretamente
Vínculos de gauge	Faddeev-Popov + fantasmas	Análise de Dirac de vínculos primários
Férmions	Variáveis de Grassmann	Anticomutadores canônicos (ETAR)
Aplicação natural	Teoria de perturbações, diagramas de Feynman	Espectro, estados de Fock, unitariedade

As duas formulações são equivalentes (teorema de Matthews) e produzem as mesmas funções de Green, a mesma matriz S e, portanto, as mesmas previsões físicas. A escolha entre uma ou outra é estratégica: **integrais de caminho** brilham em cálculos perturbativos e na extensão a teorias com simetrias de gauge e topologia não-trivial, enquanto a **quantização canônica** é insubstituível para questões de unitariedade, análise espectral, e no tratamento rigoroso de vínculos em teorias como gravidade quântica canônica e supergravidade.

Parte XI

Teoria de Campos em Espaços-Tempos Curvos

A teoria quântica de campos foi construída assumindo o espaço-tempo plano de Minkowski como palco. Essa hipótese é extraordinariamente precisa em colisores de partículas (onde $R_{\mu\nu\rho\sigma} \approx 0$ na escala de subfémtoímetros), mas falha em regimes cosmológicos (universo primordial, inflação), astrofísicos extremos (horizontes de buracos negros) e em qualquer tentativa de unificar o Modelo Padrão com gravitação. Formular QFT em um espaço-tempo curvo $(M, g_{\mu\nu})$ — tratando a geometria como **clássica** (*background*) e os campos de matéria como **quânticos** — é o passo intermediário natural entre QFT e uma teoria completa de gravitação quântica. É nesse regime **semiclássico** que vivem alguns dos resultados mais profundos e contraintuitivos da física teórica moderna: os efeitos Unruh e Hawking, a perda aparente de unitariedade em buracos negros, a geração de flutuações primordiais durante a inflação, e a ambiguidade fundamental do conceito de partícula.

Esta parte desenvolve o arcabouço completo: formalismo de tétradas e conexões de spin (a única via de acoplar férmions à gravidade), quantização de campos em *backgrounds* curvos, derivação dos efeitos Unruh e Hawking, transporte de Bogoliubov, tensor de energia-momento renormalizado, anomalias conformes, aplicações cosmológicas (inflação, backreaction) e o formalismo de Cartan como linguagem unificadora. Termina com uma discussão honesta dos desafios conceituais em aberto.

1 Geometria Diferencial Necessária: Revisão

Seja M uma variedade pseudo-riemanniana 4D com métrica $g_{\mu\nu}(x)$ de assinatura $(+, -, -, -)$. A conexão de Levi-Civita:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}),$$

preserva a métrica ($\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0$) e é simétrica ($\Gamma_{[\mu\nu]}^{\rho} = 0$). O tensor de Riemann:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda},$$

mede a curvatura. Contraindo: $R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

A ação de Einstein-Hilbert acoplada a matéria:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_{\text{mat}}[g, \Phi].$$

As equações de Einstein emergem da variação em $g_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle,$$

onde, no regime semiclássico, o lado direito é o **valor esperado quântico** do tensor de energia-momento — a equação semiclássica de Einstein, base da gravidade semiclássica.

2 O Problema Fundamental: Férmions Exigem Tétradas

Campos tensoriais $(\phi, A_{\mu}, g_{\mu\nu})$ acoplam-se à gravidade naturalmente via substituição $\partial \rightarrow \nabla$. Mas férmions são objetos de **spin** 1/2: transformam-se sob $SL(2, \mathbb{C})$, o grupo universal de cobertura de $SO(1, 3)$. O grupo de coordenadas gerais $GL(4, \mathbb{R})$ **não possui representação espinorial** (nem sua cobertura dupla — não há espinores "de coordenadas"). Portanto, a substituição $\partial \rightarrow \nabla$ é **insuficiente** para formular a equação de Dirac em espaço-tempo curvo.

A solução é adotar um formalismo que separe a geometria local (Lorentz, onde espinores vivem naturalmente) da geometria global (difeomorfismos da variedade). Esse é o **formalismo de tétradas**.

3 Formalismo de Tétradas e Conexão de Spin

3.1 Tétradas (Vierbeine)

Em cada ponto $p \in M$ escolhe-se uma base ortonormal do espaço tangente $T_p M$:

$$e_a(x) = e_a^\mu(x) \partial_\mu, \quad a = 0, 1, 2, 3,$$

tal que

$$g_{\mu\nu}(x) e_a^\mu(x) e_b^\nu(x) = \eta_{ab},$$

onde $\eta_{ab} = \text{diag}(+, -, -, -)$ é a métrica de Minkowski. Os coeficientes e_a^μ são a **tétrada** (em 4D: *vierbein*; em n D: *vielbein*). A tétrada dual e^a_μ satisfaz:

$$e^a_\mu e_b^\mu = \delta_b^a, \quad e^a_\mu e_a^\nu = \delta_\mu^\nu.$$

Em linguagem de 1-formas:

$$\theta^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad g = \eta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b.$$

Convenções de índices. Índices **gregos** (μ, ν, ρ) são índices de **coordenadas** (espaço-tempo curvo); índices **latinos** (a, b, c) são índices **Lorentz locais** (espaço tangente, "achato"). A tétrada é a ponte entre os dois:

$$V^\mu \xleftrightarrow{e} V^a = e^a_\mu V^\mu.$$

Redundância de gauge. Uma tétrada não é única: rotações locais de Lorentz $\Lambda_b^a(x) \in SO(1, 3)$ produzem outra tétrada fisicamente equivalente:

$$e^a_\mu \rightarrow \Lambda_b^a(x) e^b_\mu,$$

mantendo $g_{\mu\nu}$ invariante. A tétrada tem 16 componentes, a métrica tem 10: a diferença 6 é exatamente o número de geradores de $SO(1, 3)$. Portanto, a tétrada carrega **simetria de gauge Lorentz local** — um elemento central do formalismo.

3.2 Derivada Covariante Lorentz e a Conexão de Spin

Para tornar esta simetria local compatível com derivadas, introduz-se a **conexão de spin** $\omega_\mu^{ab}(x)$, um campo de gauge para $SO(1, 3)$ local. A derivada covariante de um objeto

com índices Lorentz é:

$$D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b.$$

A conexão de spin é **antissimétrica** nos dois últimos índices: $\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}$ (propriedade do gerador de $SO(1,3)$).

3.3 O Postulado da Tétrada e a Relação $\omega = \omega(e)$

A compatibilidade entre a conexão de spin e a conexão de coordenadas $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ é imposta pelo **postulado da tétrada**:

$$\nabla_\mu e^a{}_\nu = \partial_\mu e^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e^a{}_\rho + \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu = 0.$$

Resolvendo para ω :

$$\omega_\mu{}^{ab} = \frac{1}{2} e^{a\nu} (\partial_\mu e^b{}_\nu - \partial_\nu e^b{}_\mu) - \frac{1}{2} e^{b\nu} (\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu) - \frac{1}{2} e^{a\rho} e^{b\sigma} (\partial_\rho e_{c\sigma} - \partial_\sigma e_{c\rho}) e^c{}_\mu.$$

Quando a torção é nula, ω é completamente determinada pela tétrada — é a conexão de Levi-Civita escrita em base não-coordenada.

3.4 Campos Espinoriais em Espaço Curvo

Com as matrizes γ^a (planas, satisfazendo $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$), define-se a matriz γ curva:

$$\gamma^\mu(x) \equiv e_a{}^\mu(x) \gamma^a,$$

que satisfaz a álgebra de Clifford dinâmica:

$$\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu}(x).$$

O gerador de $SO(1,3)$ para espinores é $\sigma^{ab} = \frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b]$, e a **derivada covariante de um espinor** em espaço curvo é:

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{4} \omega_\mu{}^{ab} \sigma_{ab} \right) \psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab} \gamma_a \gamma_b \right) \psi.$$

A ação de Dirac em espaço curvo é, portanto:

$$S_{\text{Dirac}}^{\text{curva}} = \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} [i\gamma^\mu(x) D_\mu - m] \psi.$$

Esta é a única forma consistente de acoplar férmions à gravidade. Todo o Modelo Padrão, quando acoplado a um *background* curvo, exige tétradas — não apenas para quarks e

léptons, mas também para garantir a estrutura de gauge consistente dos bósons de Yang-Mills (que também envolvem spins).

3.5 Curvatura da Conexão de Spin

Definindo o **tensor de curvatura de Lorentz**:

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} \equiv \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^{cb} - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^{cb},$$

e relacionando via tétadas:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = e_a{}^\rho e_b{}^\sigma R_{\mu\nu}{}^{ab},$$

recuperamos exatamente o tensor de Riemann. A ação de Einstein-Hilbert, em formalismo de tétadas:

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x e e_a{}^\mu e_b{}^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}, \quad e \equiv \det(e^a{}_\mu) = \sqrt{-g}.$$

Esta é a base do formalismo de **Palatini** (tratando e e ω como variáveis independentes), que se generaliza naturalmente para incluir **torção** quando acoplada a férmions (teoria de Einstein-Cartan, brevemente discutida adiante).

4 O Formalismo de Cartan: Linguagem de Formas Diferenciais

O formalismo desenvolvido acima pode ser reexpresso de modo elegante e compacto no **formalismo de Cartan**, usando formas diferenciais.

4.1 Tétrada como 1-Forma

A tétada $\theta^a = e^a{}_\mu dx^\mu$ é uma 1-forma valorada no espaço de Minkowski. A conexão de spin $\omega^{ab} = \omega_\mu{}^{ab} dx^\mu$ é uma 1-forma valorada na álgebra $\mathfrak{so}(1,3)$.

4.2 Primeira Equação de Estrutura de Cartan

A torção é uma 2-forma definida por:

$$T^a \equiv d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b.$$

Para uma conexão sem torção (Levi-Civita), $T^a = 0$, o que determina ω^{ab} em termos de θ^a (equivalente à fórmula explícita anterior).

4.3 Segunda Equação de Estrutura de Cartan

A curvatura é uma 2-forma valorada em $\mathfrak{so}(1, 3)$:

$$R^{ab} \equiv d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb}.$$

Tomando componentes: $R^{ab} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}^{ab} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

4.4 Identidades de Bianchi

Diferenciando as equações de estrutura:

$$dT^a + \omega^a_b \wedge T^b = R^a_b \wedge \theta^b \quad (1^\text{a} \text{ Bianchi}),$$

$$dR^{ab} + \omega^a_c \wedge R^{cb} - \omega^b_c \wedge R^{ca} = 0 \quad (2^\text{a} \text{ Bianchi}).$$

Essas equações codificam compactamente todas as identidades geométricas que em formalismo tensorial exigem páginas de álgebra.

4.5 Ação de Einstein-Hilbert em Cartan

A ação EH reescreve-se elegantemente como:

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{32\pi G} \int \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \theta^c \wedge \theta^d.$$

Varia-se independentemente em θ^a e ω^{ab} (formalismo de Palatini de primeira ordem). A variação em ω produz a condição de torção nula (em QG pura); em presença de férmions, gera torção proporcional ao tensor de spin dos férmions — a **teoria de Einstein-Cartan**.

Observação: Em Einstein-Cartan, o espinor gera torção não-nula, produzindo uma interação efetiva spin-spin que modifica a equação de Dirac. O efeito é extraordinariamente pequeno (escala de Planck) mas existe em princípio, e se torna relevante apenas em densidades extremas (interiores de estrelas de nêutrons, singularidades).

5 Quantização em Espaços-Tempos Curvos

5.1 Campo Escalar: Equação de Klein-Gordon Curva

A ação do campo escalar real:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2],$$

onde ξ é o **acoplamento à curvatura**. Valores especiais: $\xi = 0$ (minimal), $\xi = 1/6$ (**acoplamento conforme** em 4D). A equação de movimento:

$$\boxed{[\square + m^2 + \xi R] \phi = 0, \quad \square \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) .}$$

As soluções formam um espaço de Hilbert com produto interno conservado de Klein-Gordon sobre uma hipersuperfície Cauchy Σ :

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_\Sigma d\Sigma^\mu [\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - (\partial_\mu \phi_1) \phi_2^*].$$

5.2 Expansão em Modos

Escolhe-se uma base $\{u_k\}$ de soluções de frequência positiva e $\{u_k^*\}$ de frequência negativa. O campo é expandido:

$$\phi(x) = \sum_k \left[a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x) \right],$$

com $[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$. O **vácuo** é definido por $a_k |0\rangle = 0$ para todos os k .

5.3 A Ambiguidade Fundamental: Não Há Vácuo Único

Em Minkowski, a escolha "natural" de modos de frequência positiva usa o vetor de Killing tipo-tempo ∂_t : $u_k \propto e^{-i\omega t}$ com $\omega > 0$. O vácuo é invariante sob Poincaré e é o único vácuo natural.

Em espaço-tempo curvo genérico, **não há vetor de Killing tipo-tempo global**. Duas famílias distintas de soluções $\{u_k\}$ e $\{\bar{u}_j\}$, ambas matematicamente válidas, definem **dois vácuos inequivalentes** $|0\rangle$ e $|\bar{0}\rangle$. Um observador com os modos $\{u_k\}$ vê o vácuo $|\bar{0}\rangle$ como um estado populado por partículas. **O conceito de partícula é dependente do observador.**

Esta é a lição mais profunda da QFT em espaços curvos: **partículas não são en-**

tes geométricos fundamentais. O que é fundamental é o *campo* e seu estado quântico; a contagem de partículas depende da classe de observadores (das coordenadas adaptadas a eles).

5.4 Transformações de Bogoliubov

A mudança de base é parametrizada por coeficientes de Bogoliubov:

$$\bar{u}_j = \sum_k (\alpha_{jk} u_k + \beta_{jk} u_k^*),$$

com

$$\alpha_{jk} = (\bar{u}_j, u_k), \quad \beta_{jk} = -(\bar{u}_j, u_k^*).$$

A condição de normalização impõe:

$$\sum_k (\alpha_{jk} \alpha_{j'k}^* - \beta_{jk} \beta_{j'k}^*) = \delta_{jj'}.$$

Os operadores transformam-se como:

$$\bar{a}_j = \sum_k (\alpha_{jk}^* a_k - \beta_{jk}^* a_k^\dagger).$$

5.5 Densidade de Partículas no Vácuo Alternativo

O número de partículas em modo $\bar{u}_j$ no vácuo $|0\rangle$ é:

$$\langle 0 | \bar{N}_j | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{a}_j^\dagger \bar{a}_j | 0 \rangle = \sum_k |\beta_{jk}|^2.$$

Quando $\beta \neq 0$, os vácuos são inequivalentes e há **criação de partículas**. Esse mecanismo é o núcleo de todos os fenômenos não-triviais desta seção: Unruh, Hawking, produção cosmológica de partículas.

6 O Efeito Unruh

6.1 O Setup

Considere um observador uniformemente acelerado no espaço-tempo de Minkowski, com aceleração própria a . Sua linha de mundo é uma hipérbole:

$$x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau), \quad t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau).$$

O observador acelerado tem acesso apenas à região $|x| > |t|$ (a **cunha de Rindler** direita), limitada por um **horizonte de Rindler**. Coordenadas adaptadas (ξ, η) em Rindler:

$$t = \xi \sinh(a\eta), \quad x = \xi \cosh(a\eta),$$

e a métrica:

$$ds^2 = (a\xi)^2 d\eta^2 - d\xi^2.$$

O vetor de Killing tipo-tempo de Rindler é $\partial_\eta = a(x\partial_t + t\partial_x)$, associado a *boosts*.

6.2 A Transformação de Bogoliubov

Os modos de Minkowski $u_k^M \propto e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ e de Rindler $u_\Omega^R \propto e^{-i\Omega\eta}$ estão relacionados por uma transformação de Bogoliubov não-trivial. Os coeficientes β entre os dois são explicitamente calculáveis e resultam em:

$$|\beta_\Omega|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\Omega/a} - 1}.$$

6.3 O Resultado: Espectro Térmico

O observador acelerado, ao examinar o vácuo de Minkowski $|0_M\rangle$, observa um espectro **térmico** (Planck) com **temperatura de Unruh**:

$$T_U = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B}.$$

Numericamente: $T_U \approx 4 \times 10^{-23} a \text{ [m/s}^2\text{]} \text{ Kelvin}$. Para $a = 1g$, $T_U \sim 10^{-19} \text{ K}$ — absurdamente pequeno, fora de qualquer possibilidade de detecção direta.

Mas o princípio é profundo. O vácuo de Minkowski, quando examinado do ponto de vista de um observador acelerado, **é um estado térmico** — um banho de radiação em temperatura T_U . A matriz densidade reduzida (traçando sobre o lado esquerdo da cunha de Rindler, inacessível) é:

$$\rho_{\text{Rindler}} = \frac{1}{Z} e^{-H_{\text{Rindler}}/T_U}.$$

Esse é um dos resultados mais elegantes de QFT: **o vácuo inercial é um estado emaranhado entre as duas cunhas de Rindler, e o traço sobre uma delas produz térmico.** A termalidade é uma manifestação direta do emaranhamento entre graus de liberdade do lado oposto do horizonte.

Interpretação moderna. O efeito Unruh é frequentemente interpretado através do detector de Unruh-DeWitt: um sistema quântico simples com dois níveis acoplado ao campo. Um detector em repouso no vácuo de Minkowski não transita; um detector acelerado transita como se estivesse imerso em banho térmico a T_U . **A prova operacional:** qualquer "detector" físico (átomo, elétron) acelerado **se excita**, e a estatística dessas excitações é Planck.

7 O Efeito Hawking

7.1 Preparação: Geometria de Schwarzschild

O buraco negro de Schwarzschild (solução estática esfericamente simétrica):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

O horizonte de eventos está em $r_S = 2GM$ (raio de Schwarzschild). A **gravidade superficial** κ — análogo gravitacional da aceleração — é:

$$\kappa = \frac{1}{4GM}.$$

7.2 Bogoliubov Entre Modos *In* e *Out*

Considera-se um buraco negro formado por colapso gravitacional. Há dois vácuos naturais:

- $|0_{\text{in}}\rangle$: vácuo no passado remoto ($\mathcal{I}^-$, antes do colapso) — modos $e^{-i\omega v}$ com $v = t + r^*$.
- $|0_{\text{out}}\rangle$: vácuo no futuro remoto ($\mathcal{I}^+$, após formação) — modos $e^{-i\omega u}$ com $u = t - r^*$.

A propagação ao longo do colapso relaciona u e v via uma transformação que, perto do horizonte, se comporta como:

$$u \sim -\frac{1}{\kappa} \ln(v_H - v),$$

onde v_H é o valor de v no qual o raio de luz fica preso no horizonte. Essa relação logarítmica é matematicamente **idêntica** à relação entre modos de Rindler e Minkowski, substituindo $a \rightarrow \kappa$.

7.3 O Resultado de Hawking (1974)

Os coeficientes β calculados produzem um fluxo térmico de partículas emergindo do buraco negro no futuro, com **temperatura de Hawking**:

$$T_H = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c k_B} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}.$$

Numericamente: para um buraco negro de massa solar, $T_H \approx 6 \times 10^{-8}$ K — muito menor que a temperatura do fundo cósmico de microondas (2.7 K), portanto invisível. Para buracos negros primordiais de 10^{11} kg, $T_H \sim 10^{12}$ K e a evaporação é explosiva.

7.4 O Mecanismo em Detalhe

A radiação de Hawking não é tecnicamente *emitida* pelo horizonte, mas *produzida no campo* em sua vizinhança. Heuristicamente: flutuações do vácuo criam pares partícula-antipartícula virtuais; próximo ao horizonte, um membro pode cair dentro (energia negativa como visto do infinito) e outro escapar ao infinito (energia positiva). O buraco negro perde massa a uma taxa:

$$\frac{dM}{dt} \sim -\frac{\hbar c^4}{G^2 M^2}.$$

O tempo de vida:

$$\tau_{\text{evap}} \sim \frac{G^2 M^3}{\hbar c^4} \sim 10^{67} \text{ anos} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3.$$

Um buraco negro de massa solar sobrevive 10^{56} vezes a idade do universo.

7.5 Leis da Termodinâmica de Buracos Negros

A temperatura e entropia de Bekenstein-Hawking levam à formulação das **quatro leis da termodinâmica de buracos negros** (Bardeen-Carter-Hawking 1973):

1. **Lei Zero:** κ é constante sobre o horizonte.

2. **Primeira Lei:** $dM = T_H dS + \Omega dJ + \Phi dQ$, com $S = A/(4\ell_P^2)$.
3. **Segunda Lei:** $dA \geq 0$ (área nunca decresce classicamente; quanticamente, $dS_{\text{total}} \geq 0$ incluindo radiação).
4. **Terceira Lei:** $\kappa \rightarrow 0$ (extremalidade) não é alcançável em processos finitos.

A identificação $T \leftrightarrow \kappa$ e $S \leftrightarrow A/4$ é uma das correspondências mais notáveis da física. A entropia de Bekenstein-Hawking:

$$S_{\text{BH}} = \frac{k_B A}{4\ell_P^2},$$

é colossal: para $M = M_\odot$, $S \sim 10^{77} k_B$, excedendo em ordens de magnitude a entropia de qualquer objeto estelar convencional.

7.6 O Paradoxo da Informação

A radiação de Hawking é **térmica** (puramente estatística). Se um buraco negro formado a partir de um estado puro (informação completa) evapora totalmente em radiação térmica (informação zero), violou-se a **unitariedade da mecânica quântica**. Este é o **paradoxo da informação** de Hawking (1976), ainda sem resolução consensual. Propostas:

- Pequenas correções na radiação reconstroem informação (Page).
- Firewalls, fuzzballs (Mathur), complementaridade (Susskind).
- Superfícies quânticas extremas e entropias generalizadas (Engelhardt-Wall, Penington, Almheiri et al. 2019-20): o cálculo gravitacional *pode* reproduzir a curva de Page unitária usando "ilhas"— um enorme avanço recente.

O debate é ativo e toca aspectos fundamentais da gravitação quântica.

8 Tensor de Energia-Momento Renormalizado

8.1 O Problema Divergente

Em Minkowski, $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ é formalmente infinito (soma sobre $\frac{1}{2}\hbar\omega$ de todos os modos), mas removemos essa divergência por *ordenamento normal*. Em espaço curvo, **essa manobra é insuficiente** — a energia do vácuo depende da geometria, e essa dependência é fisicamente relevante (gravita!).

8.2 Procedimentos de Regularização

Métodos de regularização em QFT curva:

- **Regularização dimensional:** cálculo em $d = 4 - 2\epsilon$ dimensões.
- **Ponto de separação** (*point-splitting*): $T_{\mu\nu}(x) \rightarrow \lim_{x' \rightarrow x} T_{\mu\nu}(x, x')$ removendo as singularidades no limite $x' \rightarrow x$.
- **Zeta de Riemann** (ζ -função): soma regularizada via $\zeta(s)$ analiticamente continuada.
- **Adiabática:** subtrai termos até ordem suficientemente alta em derivadas da métrica.

Todos convergem para o mesmo $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ renormalizado, mas com **contratermos de origem geométrica**: Λ , R , R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Renormalizabilidade em espaço curvo requer, portanto, esses contratermos na Lagrangiana gravitacional — esta é a origem dos termos de curvatura quadrática em gravitação efetiva de Einstein.

8.3 A Anomalia Conforme

Em 4D, para um campo conformemente acoplado clássico ($\xi = 1/6$, $m = 0$), a simetria conforme $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}$ implica $T^\mu_\mu = 0$. Porém, o processo de regularização **quebra** essa simetria, gerando a **anomalia de traço**:

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = \frac{1}{2880\pi^2} \left[a (R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) + b \square R + c R^2 \right],$$

com coeficientes a, b, c que dependem do conteúdo de campos (tipo e número). Esta é uma das manifestações mais sutis de anomalia quântica: a invariância de escala clássica é quebrada pelo procedimento de renormalização. Consequências:

- Produção cosmológica de partículas no universo primordial.
- Cálculo da radiação de Hawking via anomalia (Robinson-Wilczek 2005).
- Contribuição à função c em teorias em 2D (teorema-c de Zamolodchikov).

9 Aplicações Cosmológicas

9.1 Produção de Partículas em Universo em Expansão

Em um espaço-tempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\vec{x}^2,$$

os modos do campo escalar satisfazem:

$$\ddot{\chi}_k + \omega_k^2(t) \chi_k = 0, \quad \omega_k^2 = \frac{k^2}{a^2} + m^2 + \text{termos de curvatura},$$

onde $\chi_k = a^{3/2} \phi_k$. Quando $\omega_k(t)$ varia adiabaticamente, não há produção de partículas. Quando a variação é **não-adiabática** (transições rápidas, mudança súbita de regime), os vácuos iniciais e finais são inequivalentes — ocorre **produção cosmológica de partículas**, dada pela relação de Bogoliubov.

9.2 Inflação e Flutuações Primordiais

O mecanismo gerador das inomogeneidades do universo observado (CMB, estrutura em larga escala) é a amplificação quântica de flutuações durante a **inflação cósmica**:

1. No início da inflação, modos k estão *dentro* do horizonte de Hubble: são flutuações quânticas ordinárias de vácuo em espaço quase de Sitter.
2. Durante a expansão acelerada, $a(t) \sim e^{Ht}$, e o comprimento de onda físico a/k cresce exponencialmente; os modos *saem do horizonte* quando $k/a = H$.
3. Após deixar o horizonte, a amplitude do modo *congela* — torna-se uma perturbação clássica coerente.
4. Re-entra no horizonte durante a era da radiação/matéria, semeando as inomogeneidades observadas.

O espectro de potência das flutuações escalares é:

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{H^2}{(2\pi)^2 \epsilon M_P^2} \Big|_{k=aH},$$

onde $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ é o parâmetro de rolagem lenta. Valores medidos pelo Planck: $\mathcal{P}_\zeta \sim 2 \times 10^{-9}$, índice espectral $n_s \approx 0.965$. **As anisotropias do CMB são, literalmente,**

flutuações quânticas de campo amplificadas pela expansão cósmica — mais uma aplicação espetacular de QFT em espaços-tempos curvos.

9.3 Espaço de de Sitter e Sua Temperatura

O espaço de Sitter (com constante cosmológica $\Lambda > 0$) é caracterizado por uma taxa de Hubble constante $H = \sqrt{\Lambda/3}$ e possui um **horizonte de eventos** para cada observador. Analogamente ao efeito Hawking, um observador em de Sitter detecta uma temperatura:

$$T_{\text{ds}} = \frac{\hbar H}{2\pi k_B},$$

e entropia associada $S_{\text{ds}} = \pi/(H^2 G)$. Esta "termodinâmica de de Sitter" sugere fortes conexões entre gravitação, holografia e termodinâmica, e é central em discussões modernas sobre o problema da constante cosmológica e da teoria da informação em cosmologia.

10 Modelo Padrão em *Backgrounds* Curvos

Acoplar o MP à gravidade requer aplicar o formalismo de tetradas a cada setor:

Setor de Higgs. Termo de acoplamento não-mínimo $\xi R H^\dagger H$ é permitido. A escolha $\xi \neq 0$ tem implicações cosmológicas enormes — inflação de Higgs (Bezrukov-Shaposhnikov 2008), onde o próprio bóson de Higgs do MP atua como campo inflacionário quando $\xi \sim 10^4$. Reconcilia o MP com observações do Planck sem adicionar novos campos — um dos modelos de inflação mais minimalistas.

Setor de Yukawa. As massas dos férmions, geradas por $y \bar{\psi}_L H \psi_R + \text{h.c.}$, mantêm sua forma, mas o termo cinético fermiônico usa D_μ com conexão de spin:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{curvo}} = \sqrt{-g} \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi.$$

Setor de gauge. Bósons W, Z, γ, g acoplam-se minimamente ($\partial \rightarrow \nabla$), mas termos não-mínimos como $R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ são permitidos e podem ter efeitos fenomenológicos em inflação.

Anomalias gravitacionais. O MP é livre de anomalias gravitacionais mistas (verificado nas seções anteriores), essencial para consistência em *background* curvo.

11 Desafios Conceituais em Aberto

O formalismo de QFT em espaços curvos é auto-consistente, mas exibe tensões profundas que apontam para a necessidade de uma teoria completa de gravitação quântica:

11.1 1. Ambiguidade do Vácuo

Como vimos, não há vácuo universal em espaços curvos. Diferentes famílias de observadores selecionam vácuos diferentes. Isso é *operacionalmente* aceitável (cada observador mede sua própria termodinâmica), mas mina a noção de "estado fundamental" como conceito absoluto. Qual é o vácuo "correto" para avaliar a constante cosmológica? Não há resposta sem uma teoria quântica da gravidade.

11.2 2. O Problema da *Backreaction*

No formalismo semiclássico, $G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle$ trata a geometria como clássica e a matéria como quântica. Essa aproximação quebra quando as flutuações de $T_{\mu\nu}$ são grandes — perto do horizonte de Planck, em fases finais da evaporação de buracos negros, ou em estados altamente emaranhados. Uma teoria autoconsistente da backreaction **exige** quantizar a própria métrica.

11.3 3. O Paradoxo da Informação

Já discutido. Conecta diretamente com:

- Holografia e AdS/CFT.
- Conjecturas ER=EPR (Maldacena-Susskind 2013).
- Entropia de emaranhamento e superfícies quânticas extremas.

A resolução plena exige gravitação quântica.

11.4 4. Constante Cosmológica

$\langle T_{\mu\nu} \rangle \supset \Lambda_{\text{QFT}} g_{\mu\nu}$ com $\Lambda_{\text{QFT}} \sim M_P^4 \sim 10^{74} \text{ GeV}^4$, versus valor observado $\Lambda_{\text{obs}} \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$. Discrepância de **120 ordens de magnitude** — o "pior palpite de qualquer teoria" (Weinberg). Nenhum mecanismo aceito cancela essa enorme contribuição. Uma das motivações centrais para GUTs, supersimetria, multiverso e teoria de cordas.

11.5 5. Renormalizabilidade

QFT em espaço curvo é renormalizável apenas se permitirmos contratermos tipo R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, etc., na ação gravitacional. Como a gravidade linearizada (gráviton) é não-renormalizável na expansão usual, estamos limitados a tratá-la como **teoria de campos efetiva**: válida até a escala de Planck, com correções suprimidas por E/M_P . Acima de $M_P \sim 10^{19}$ GeV, o formalismo falha e novos graus de liberdade (cordas? espumas de spin? algo ainda desconhecido) devem emergir.

11.6 6. Tempo em Gravitação Quântica

A questão mais profunda: em gravitação quântica plena, o próprio espaço-tempo é uma variável dinâmica. A noção de "evolução temporal"—central a toda QFT—**desaparece** em abordagens como quantização canônica de Wheeler-DeWitt ($H|\Psi\rangle = 0$: o universo quântico não "evolui"). Como reconciliar com a experiência de que vivemos em um universo com tempo bem definido? O "problema do tempo" permanece aberto em **todas** as abordagens de gravitação quântica.

12 Conexões com Abordagens de Gravitação Quântica

QFT em espaços curvos é o solo onde germinam várias abordagens a gravitação quântica:

Gravitação como teoria efetiva (Donoghue 1994). Tratando $\mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_{\text{MP}}$ como EFT, calculam-se correções quânticas de um loop ao potencial newtoniano:

$$V(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} \left[1 + 3\frac{G(M_1 + M_2)}{r c^2} + \frac{41 G \hbar}{10\pi r^2 c^3} + \cdots \right].$$

A última correção é genuinamente quântica — pequena, mas **calculável e universal**.

AdS/CFT (Maldacena 1997). Dualidade entre gravitação em $d + 1$ dimensões anti-de Sitter e CFT conforme em d dimensões. Transforma problemas gravitacionais em problemas de teoria de campo ordinária. Sucesso extraordinário em compreender plasma de quarks-glúons, viscosidade quântica, paradoxo de informação.

Gravitação quântica em loop (Rovelli, Smolin, Ashtekar). Quantização canônica da geometria. Usa variáveis de Ashtekar — formalismo de tétradas essencial. Prevê espectro discreto de áreas e volumes. Em desenvolvimento ativo.

Teoria de cordas. Unificação mais ambiciosa. Requer dimensões extras e supersimetria. Reproduz QFT em baixas energias e gravidade de Einstein. Ainda sem validação experimental, mas matematicamente rica.

Triangulações dinâmicas causais, *asymptotic safety* (Weinberg-Reuter). Abordagens alternativas onde gravitação emerge como teoria não-trivial no UV.

13 Síntese

QFT em espaços-tempos curvos é a melhor teoria **semiclássica** de que dispomos: combina com sucesso gravitação clássica com matéria quântica. Seus predições — efeitos Unruh e Hawking, flutuações inflacionárias, anomalia conforme — são robustas, bem definidas, e (no caso das flutuações cósmicas) **experimentalmente verificadas com alta precisão**. O formalismo de tétradas e conexões de spin é a única via matemática consistente de incluir férmions, e portanto o MP completo, neste arcabouço.

Entretanto, a teoria é **intrinsecamente incompleta**. Sua consistência exige tratar a geometria como clássica, mas a gravidade quântica é inevitável em regimes extremos. A **backreaction**, o **paradoxo da informação**, a **constante cosmológica** e o **problema do tempo** constituem o repositório das tensões não resolvidas entre os dois pilares da física do século XX: QFT e relatividade geral.

Resolver essas tensões — construir uma teoria verdadeiramente quântica da gravidade que reduza a QFT em espaços curvos no regime apropriado — é o grande projeto teórico inacabado da física fundamental. O Modelo Padrão, em sua formulação atual, é nosso guia mais confiável para *como a matéria se comporta* em escalas subatômicas. Mas a geometria dinâmica na qual essa matéria vive ainda guarda mistérios que nenhuma extrapolação do formalismo canônico consegue penetrar. É nesse horizonte — literal e metafórico — que a próxima revolução conceitual aguarda.